

Sous-groupes Réductifs Canoniques des Sous-Groupes Biparaboliques de $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ ou $\mathrm{SO}(p, q)$ dont l'Algèbre de Lie est Quasi-Réductive

Nabila Djebali

Communicated by A. Pasquale

Abstract. We associate a not necessarily unique meander graph to each biparabolic subgroup of $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ and $\mathrm{SO}(p, q)$. In terms of the associated meander graph to a biparabolic subgroup, we give a necessary and sufficient condition for its Lie algebra to be quasi-reductive, describe in this case the conjugacy classes of its canonical reductive subgroups and determine when it admits discrete series.

Mathematics Subject Classification 2010: 17B45, 17B20, 22E60.

Key Words and Phrases: Algèbres de Lie quasi-réductives, sous-groupes biparaboliques, graphes de méandres.

Résumé. Nous associons à chaque sous-groupe biparabolique de $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}(p, q)$ un graphe de méandres non nécessairement unique. En terme du graphe de méandres associé à un sous-groupe biparabolique, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que son algèbre de Lie soit quasi-réductive, décrivons dans ce cas les classes de conjugaison de ses sous-groupes réductifs canoniques et déterminons quand il admet des séries discrètes.

Mathematics Subject Classification 2010: 17B45, 17B20, 22E60.

Key Words and Phrases: Algèbres de Lie quasi-réductives, sous-groupes biparaboliques, graphes de méandres.

1. Introduction

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou des complexes. Rappelons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ algébrique sur $\mathbb{K}$ est dite quasi-réductive s'il existe $g \in \mathfrak{g}^*$ dont le stabilisateur $\mathfrak{g}_g$ est réductif modulo le centre de $\mathfrak{g}$; une telle forme linéaire g est dite de type réductif (voir [3]). Une algèbre de Lie quasi-réductive est dite fortement quasi-réductive si son centre est réductif (voir [4]). Rappelons qu'une forme linéaire g de type réductif est de type unipotent si et seulement si elle s'annule sur un (ou tout) facteur réductif de $\mathfrak{g}_g$ (voir [3]). Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie fortement quasi-réductive : elle possède une unique orbite co-adjointe constituée de formes linéaires de type réductif et unipotent, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et un nombre fini de

telles orbites, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si G est un groupe algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, les stabilisateurs des formes de type réductif et unipotent s'appellent les sous-groupes réductifs canoniques de G . Ils jouent un rôle important dans l'analyse harmonique sur G . Pour ce qui précède, voir [3], [4] et [2].

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur $\mathbb{K}$ et G le groupe des $\mathbb{K}$ -points d'un groupe algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Rappelons qu'un sous-groupe biparabolique de G est l'intersection de deux sous-groupes paraboliques dont la somme des algèbres de Lie est $\mathfrak{g}$ et qu'une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe biparabolique de G . Les sous-algèbres biparaboliques de $\mathfrak{g}$ qui sont quasi-réductives sont alors fortement quasi-réductives. À l'exception des groupes orthogonaux $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}(p, q)$, les algèbres de Lie des sous-groupes biparaboliques des formes réelles ou complexes des groupes classiques sont quasi-réductives (voir [5] et [2]).

Soit E l'espace $\mathbb{K}^n$ muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B , soit $\mathrm{SO}(E)$ le groupe spécial orthogonal correspondant et $\mathfrak{so}(E)$ son algèbre de Lie. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathrm{SO}(E)$ est égal à $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ et $\mathfrak{so}(E) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathrm{SO}(E)$ est l'un des groupes $\mathrm{SO}(p, q)$, $p + q = n$, $p \leq q$ et $\mathfrak{so}(E) = \mathfrak{so}(p, q)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on pose $e = q - p$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on définit les entiers p et e en décidant que $e \in \{0, 1\}$ et $n = 2p + e$.

Deux drapeaux $\mathcal{V} = \{V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m\}$ et $\mathcal{W} = \{W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_t\}$ de sous-espaces totalement isotropes de E sont dits opposés s'il existe deux sous-espaces totalement isotropes maximaux V et W en somme directe contenant respectivement $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ et des bases $(e_1, \dots, e_p)$ et $(f_p, \dots, f_1)$ respectivement de V et W vérifiant $B(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$ et adaptées aux drapeaux $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$. On dit que la base $(e_1, \dots, e_p)$ de l'espace vectoriel V est adaptée au drapeau $\mathcal{V} = \{V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m\}$ de V si, pour $1 \leq i \leq m$, $\{e_1, \dots, e_p\} \cap V_i$ est une base de V_i . Les stabilisateurs de paires de drapeaux opposés de sous-espaces totalement isotropes sont des sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{SO}(E)$. Une telle paire est caractérisée par la donnée d'une paire de compositions de nombres entiers $l, s \leq p$. Dans [2], aux entiers p et e et à une paire de compositions $(\underline{a}, \underline{b})$ des nombres l, s vérifiant les conditions précédentes, nous associons un graphe de méandres symétrique à n sommets $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$. Nous établissons ainsi une application de l'ensemble de ces graphes de méandres sur l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{SO}(E)$ qui stabilisent une paire de drapeaux opposés de sous-espaces totalement isotropes. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $p \neq q$ ou si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et n est impair, on obtient ainsi tous les sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{SO}(E)$.

Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $p = q$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $n = 2p$ est pair. Dans ce cas la situation est différente et il existe d'autres classes de conjugaison de sous-groupes biparaboliques. Notre attention a été attirée sur ce fait, que nous n'avions pas considéré dans une première version de cet article, par la lecture du travail de Panyushev et Yakimova (voir [6]).

Reprenant leur dénomination, nous dirons que deux drapeaux de sous-espaces totalement isotropes $\mathcal{V} = \{V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m\}$ et $\mathcal{W} = \{W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_t\}$ de E sont croisés s'ils ne contiennent pas de sous-espace isotrope de dimension $p - 1$, si $V = V_m$ et $W = W_t$ sont des sous-espaces totalement isotropes maximaux ayant une intersection de dimension 1 et admettant respectivement des bases $(e_1, \dots, e_p)$

et $(e_p, f_{p-1}, \dots, f_1)$ adaptées aux drapeaux $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$, vérifiant $B(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$. De même, nous dirons que deux sous-espaces isotropes maximaux sont croisés si leur intersection est de dimension 1 ; les paires de sous-espaces isotropes maximaux croisés s'identifient naturellement aux paires de drapeaux croisés dont chacun d'eux ne contient qu'un seul sous-espace isotrope. Les stabilisateurs de paires de drapeaux croisés sont des sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{SO}(E)$ qui ne sont conjugués à aucun de ceux qui stabilisent deux paires de drapeaux opposés. De plus tout sous-groupe biparabolique de $\mathrm{SO}(E)$ est le stabilisateur d'une paire de drapeaux opposés ou d'une paire de drapeaux croisés.

Une paire de drapeaux croisés est caractérisée par la donnée d'une paire $(\underline{a}, \underline{b})$ de compositions de l'entier p telles que si $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$, on ait $a_m > 1$ et $b_t > 1$. Suivant [6], à une telle paire de compositions $(\underline{a}, \underline{b})$ nous associons un graphe de méandres croisé symétrique à n sommets $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $p = q$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $n = 2p$ est pair, nous avons une surjection de l'ensemble des graphes $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ où $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont chacune une composition d'un entier inférieur ou égal à p sur l'ensemble des classes de conjugaison sous $\mathrm{O}(E)$ des sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{SO}(E)$ stabilisant une paire de drapeaux opposés et également une surjection de l'ensemble des graphes croisés $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ où $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont des compositions de l'entier p sur l'ensemble des classes de conjugaison sous $\mathrm{O}(E)$ des sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{SO}(E)$ stabilisant une paire de drapeaux croisés.

Ces constructions s'inspirent de [1]. Il est bien connu que les sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ sont les stabilisateurs de paires de drapeaux opposés, lesquelles sont caractérisées par la donnée d'une paire de compositions de n . Dans [1], Dergachev et Kirillov associent à une paire de compositions de n un graphe de méandres et caractérisent l'indice de l'algèbre de Lie du sous-groupe biparabolique correspondant en termes de ce graphe.

Dans [4], Moreau et Yakimova décrivent d'une part la classe de conjugaison des sous-groupes réductifs canoniques d'un sous-groupe biparabolique de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, en terme du graphe de méandres associé et d'autre part celle des sous-algèbres réductives canoniques des sous-algèbres paraboliques quasi-réductives de $\mathfrak{sp}(p, \mathbb{C})$, $(2p = n)$ de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ et des algèbres de Lie simples exceptionnelles.

Dans [2], nous avons montré que les algèbres de Lie des sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$, où $\mathbb{H}$ est le corps des quaternions, $\mathrm{Sp}(p, \mathbb{R})$, $\mathrm{U}(p, q)$, $\mathrm{Sp}(p, q)$ et $\mathrm{SO}^*(2n)$ sont quasi-réductives et nous avons déterminé en termes du graphe de méandres correspondant les classes de conjugaison des sous-groupes réductifs canoniques de ces sous-groupes biparaboliques. Ainsi, nous avons achevé la détermination des classes de conjugaison des sous-groupes réductifs canoniques des sous-groupes biparaboliques dont l'algèbre de Lie est quasi-réductive des formes réelles ou complexes des groupes de Lie classiques, à l'exception de $\mathrm{Sp}(p, \mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}(p, q)$. Il est immédiat que le cas des sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{Sp}(p, \mathbb{C})$ se traite comme celui des sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{Sp}(p, \mathbb{R})$.

Dans ce travail, nous donnons une condition nécessaire et suffisante portant sur le graphe de méandres associé pour qu'une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{so}(E)$ stabilisant une paire de drapeaux de sous-espaces totalement isotropes opposés soit

fortement quasi-réductive (voir le théorème 4.1). Lorsque c'est le cas nous décrivons en termes du graphe de méandres associé, un système de représentants des classes de conjugaison des sous-groupes réductifs canoniques du sous-groupe biparabolique correspondant (voir le théorème 4.2). De même nous montrons que les algèbres de Lie des sous-groupes biparaboliques stabilisant une paire de drapeaux de sous-espaces totalement isotropes croisés sont toutes quasi-réductives et décrivons en termes du graphe de méandres associés les sous-groupes réductifs canoniques de ces derniers (voir le théorème 4.3). La démonstration de nos résultats utilise le même procédé de récurrence que dans [5], repris par nous dans [2]. Ce procédé permet de ramener l'étude des sous-groupes biparaboliques à celui des sous-groupes paraboliques pour ceux stabilisant une paire de drapeaux opposés ou à celui des sous-groupes stabilisant deux sous-espaces totalement isotropes maximaux croisés pour ceux stabilisant une paire de drapeaux croisés.

Comme conséquence des théorèmes 4.1 et 4.2, nous donnons une condition nécessaire et suffisante portant sur le graphe de méandres associé pour qu'une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{so}(E)$ soit de Frobenius ou pour qu'un sous-groupe biparabolique de $SO(E)$ admette des séries discrètes.

Remerciements. Je remercie mes encadreurs Mohamed Salah Khalgui et Pierre Torasso qui m'ont aidée à faire ce travail, le laboratoire de Mathématiques et Applications de l'Université de Poitiers, la faculté des Sciences de Tunis de l'Université de Tunis El Manar. De plus ce travail a bénéficié du soutien du programme Erasmus-Mundus Al-Idrisi. Je remercie Michel Duflo pour d'utiles remarques. Je remercie également le referee pour sa lecture attentive du manuscrit et ses remarques qui ont permis d'en améliorer la rédaction.

Dans la suite, si G est le groupe des $\mathbb{K}$ -points d'un groupe algébrique défini sur $\mathbb{K}$ et si $\mathfrak{g}$ désigne son algèbre de Lie, on note uG (resp. ${}^u\mathfrak{g}$) le radical unipotent respectif de G (resp. $\mathfrak{g}$).

Si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agissant continuellement dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie E et si v est un vecteur (resp. un vecteur non nul) de E , on note G_v (resp. $G_{\mathbb{K}v}$) le stabilisateur de v (resp. de la droite $\mathbb{K}v$) dans G et $\mathfrak{g}_v$ (resp. $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}v}$) son algèbre de Lie.

2. Le cas des sous-groupes paraboliques

On se donne des entiers naturels $1 \leq p \leq q$ et $n \geq 3$ tels que $p + q = n$. On pose $e = q - p$ de sorte que $n = 2p + e$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on convient que $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ de sorte que $e = 0$ ou $e = 1$, selon la parité de n . Si r est un entier naturel non nul, on note I_r la matrice identité d'ordre r et γ_r la matrice carrée d'ordre r dont les seuls coefficients non nuls sont ceux de l'antidiagonale qui valent tous 1, autrement dit $(\gamma_r)_{i,j} = \delta_{i+j,r+1}$. On munit $E = \mathbb{K}^n$ de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée B dont la matrice dans la base canonique est

$$\kappa_{p,e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_p \\ 0 & I_e & 0 \\ \gamma_p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on désigne par $\mathrm{SO}(E)$ le groupe spécial orthogonal correspondant. On note $e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_e, f_p, \dots, f_1$ les éléments de la base canonique de E , si bien que l'on a $B(e_i, e_j) = B(f_i, f_j) = B(e_i, g_k) = B(f_i, g_k) = 0$, $B(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$ et $B(g_i, g_j) = \delta_{i,j}$.

Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ une composition de l'entier $1 \leq l \leq p$. Pour $1 \leq i \leq m$, on pose $l_i = a_1 + \dots + a_i$, de sorte que $l_m = l$, $1 \leq l \leq p$ et on convient que $l_0 = 0$. Soit $\mathcal{V} = \{V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_m\}$ le drapeau de sous-espaces totalement isotropes tel que, pour $1 \leq i \leq m$, V_i soit engendré par $e_1, \dots, e_{l_i}$. On désigne par $P(\underline{a} \mid \emptyset)$ ou plus simplement par $P(\underline{a})$ le sous-groupe parabolique de $\mathrm{SO}(E)$ stabilisant $\mathcal{V}$ et par $\mathfrak{p}(\underline{a} \mid \emptyset)$ ou $\mathfrak{p}(\underline{a})$ son algèbre de Lie. Si on tient à préciser, on posera $P(\underline{a}) = P_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a})$ et $\mathfrak{p}(\underline{a}) = \mathfrak{p}_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a})$. On remarque que si $l = 0$, toute composition $\underline{a}$ de l est vide et qu'alors $P(\emptyset) = \mathrm{SO}(E)$. Tout sous-groupe parabolique de $\mathrm{SO}(E)$ est conjugué à un $P(\underline{a})$, où $\underline{a}$ est une composition d'un entier $0 \leq l \leq p$.

Remarque 2.1. Si $p < q$, les $P(\underline{a})$, pour $\underline{a}$ parcourant l'ensemble des compositions des entiers $0 \leq l \leq p$, forment un système de représentants des classes de conjugaison des sous-groupes paraboliques de $\mathrm{SO}(E)$. Autrement dit, dans ce cas, l'application $\underline{a} \mapsto P(\underline{a})$ induit une bijection de l'ensemble des compositions d'entiers $0 \leq l \leq p$ sur l'ensemble des classes de conjugaisons de sous-groupes paraboliques de $\mathrm{SO}(E)$.

Ce résultat n'est plus vrai si $p = q$ (voir [3] numéro 5.24). Dans ce cas les seuls sous-espaces totalement isotropes maximaux qui contiennent le sous-espace $W = \langle e_1, \dots, e_{p-1} \rangle$ sont $V^+ = \langle e_1, \dots, e_{p-1}, e_p \rangle$ et $V^- = \langle e_1, \dots, e_{p-1}, f_p \rangle$ et le sous-groupe parabolique de $\mathrm{SO}(E)$ stabilisateur de W stabilise également V^+ et V^- . De plus V^+ et V^- sont conjugués sous l'action de $\mathrm{O}(E)$ mais pas de $\mathrm{SO}(E)$. On déduit de ceci que, si $n = 2p$ ou $p = q$,

- (i) les compositions $(a_1, \dots, a_m)$ de $p-1$ et $(a_1, \dots, a_m, 1)$ de p définissent la même classe de conjugaison sous $\mathrm{O}(E)$ de sous-groupes paraboliques de $\mathrm{SO}(E)$;
- (ii) les $P(\underline{a})$, pour $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ une composition d'un entier $0 \leq l \leq p-1$ ou une composition de p avec dans ce cas $a_m > 1$, forment un ensemble de représentants des classes de conjugaison sous $\mathrm{O}(E)$ de sous-groupes paraboliques de $\mathrm{SO}(E)$.

Si $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ est une composition de l'entier $0 \leq l \leq p$, $\underline{a}' = (a_1, \dots, a_{m'})$, $m' = m-1$, si $l = \frac{n}{2}$ et l est impair, et $\underline{a}' = \underline{a}$, $m' = m$, sinon.

Définition 2.1. On dit que la composition $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ vérifie la condition (*) si elle est vide ou si l'ensemble d'indices $\mathcal{J} = \{1 \leq i \leq m \mid a_i \text{ est impair}\}$ n'a pas de composante connexe de cardinal impair ne contenant pas m .

Le résultat suivant est une reformulation de l'assertion (iii) de [3], théorème 29.

Théorème 2.1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}(\underline{a})$ est quasi-réductive si et seulement si la composition $\underline{a}'$ associé à $\underline{a}$ vérifie la condition (*).

Dans la suite, on suppose que la composition $\underline{a}$ est telle que $\underline{a}'$ vérifie la condition (*).

Soit $\mathcal{S}' = \{1 \leq i \leq m' \mid a_i \text{ est impair}\}$ et $\mathcal{P}' = \{1 \leq i \leq m' \mid a_i \text{ est pair}\}$. Le fait que $\underline{a}'$ vérifie la condition (*) équivaut à ce que l'ensemble $\mathcal{S}'$ possède au plus une composante connexe de cardinal impair, laquelle, si elle existe, contienne m' . Soit donc $\mathcal{C}$ l'ensemble des composantes connexes de cardinal pair de $\mathcal{S}'$ et I_0 la composante connexe de cardinal impair de $\mathcal{S}'$, si elle existe. Si cette dernière n'existe pas, on convient que $I_0 = \emptyset$.

Si a est un entier naturel on note $\text{Sp}(a)$ le groupe symplectique constitué des matrices $g \in \text{GL}(2a)$ qui laissent invariante la forme symplectique dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^{2a}$ est

$$\iota_a = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_a \\ -\gamma_a & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $1 \leq i \leq m$. On note E_i le sous-espace de E engendré par les vecteurs $e_{l_{i-1}+1}, \dots, e_{l_i}, f_{l_i}, \dots, f_{l_{i-1}+1}$. Alors la restriction de B à E_i est non dégénérée et on a $E = E_i \oplus E_i^\perp$. On désigne par η_i le plongement de groupes algébriques de $\text{GL}(a_i)$ dans $\text{SO}(E)$, en fait dans $P(\underline{a})$, tel que, si $g \in \text{GL}(a_i)$, $\eta_i(g)$ laisse invariant E_i et agisse trivialement dans $E_i^\perp$, la matrice de $\eta_i(g)|_{E_i}$ dans la base $e_{l_{i-1}+1}, \dots, e_{l_i}, f_{l_i}, \dots, f_{l_{i-1}+1}$ s'écrivant par blocs

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \gamma_{a_i} {}^t g^{-1} \gamma_{a_i} \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, on convient que $a_{m+1} = 0$, que $\text{GL}(0)$ est le groupe trivial et que η_{m+1} est l'unique plongement de $\text{GL}(0)$ dans $\text{SO}(E)$.

Soit $i \in \mathcal{P}'$. On désigne alors par R_i le sous-groupe de $P(\underline{a})$ image de $\text{Sp}(\frac{a_i}{2})$ par η_i .

Soit a, b deux entiers naturels avec a impair. L'application

$$(g, h) \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

est un plongement de groupes algébriques de $\text{GL}(a) \times \text{GL}(b)$ dans $\text{GL}(a+b)$ par lequel on identifie $\text{GL}(a) \times \text{GL}(b)$ à un sous-groupe de $\text{GL}(a+b)$ (si $b = 0$, on convient que la ligne et la colonne contenant h sont vides). On désigne par $\tilde{R}_{a,b}$ le sous-groupe de $\text{GL}(a) \times \text{GL}(b) \subset \text{GL}(a+b)$ constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \text{ si } b = 0,$$

$$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \text{ si } b \text{ est impair},$$

$$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \text{ si } b > 0 \text{ est pair},$$

avec $g \in \mathrm{Sp}(\lfloor \frac{a}{2} \rfloor)$, $h \in \mathrm{Sp}(\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor)$, $\epsilon \in \{\pm 1\}$ et en convenant que si $\lfloor \frac{a}{2} \rfloor = 0$ (resp. $\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor = 0$), la ligne et la colonne contenant g (resp. h) sont vides. On définit le caractère $\epsilon : \tilde{R}_{a,b} \rightarrow \{\pm 1\}$ en décidant que pour $g \in \tilde{R}_{a,b}$, $g.e = \epsilon(g)e$, où e est le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{a+b}$.

Soit $1 \leq i \leq m$ tel que a_i soit impair. Alors, l'application $\tilde{\eta}_i : (g, h) \mapsto \eta_i(g)\eta_{i+1}(h)$ est un plongement de groupes algébriques de $\mathrm{GL}(a_i) \times \mathrm{GL}(a_{i+1})$ dans $P(\underline{a})$ et on désigne par R_i le sous-groupe de $P(\underline{a})$ image par $\tilde{\eta}_i$ du sous-groupe $\tilde{R}_{a_i, a_{i+1}}$ de $\mathrm{GL}(a_i) \times \mathrm{GL}(a_{i+1})$. On définit le caractère ϵ de R_i en décidant que, pour $g \in \tilde{R}_{a_i, a_{i+1}}$, $\epsilon(\tilde{\eta}_i(g)) = \epsilon(g)$.

Soit $I \subset \mathcal{J}'$ une partie connexe non vide de cardinal pair $2u$ de sorte que $I = \{i_0, i_0 + 1, \dots, i_0 + 2u - 1\}$. Les sous-groupes R_{i_0+2j} , $0 \leq j \leq u - 1$ commutent deux à deux et on pose $R_I = \prod_{j=0}^{u-1} R_{i_0+2j}$, qui est en fait un produit direct.

Soit $V_m^* = \langle f_{l_m}, \dots, f_1 \rangle$, qui est un sous-espace isotrope supplémentaire dans E de l'orthogonal $V_m^\perp$ de V_m pour B , et soit

$$F = \langle e_{l_m+1}, \dots, e_p, g_1, \dots, g_e, f_p, \dots, f_{a_1+1} \rangle,$$

de sorte que $F = (V_m \oplus V_m^*)^\perp$ et $E = V_m \oplus V_m^* \oplus F$. On identifie $\mathrm{SO}(F)$ au sous-groupe de $\mathrm{SO}(E)$ constitué des éléments agissant trivialement dans $V_m \oplus V_m^*$. Si F est non nul et si $\nu \in F$ est un élément non isotrope, on identifie le groupe orthogonal $\mathrm{O}(F \cap \nu^\perp)$ au sous-groupe de $\mathrm{SO}(F)$ constitué des éléments dont ν est un vecteur propre. Si $g \in \mathrm{O}(F \cap \nu^\perp)$, $\det g$ désigne le déterminant de la restriction de g à $F \cap \nu^\perp$. En particulier, on a $g\nu = (\det g)\nu$, $g \in \mathrm{O}(F \cap \nu^\perp)$.

Si I_0 est vide et $m' = m$, on pose $R_{I_0} = \mathrm{SO}(F)$.

Si I_0 est vide et $m' = m - 1$, a_m est impair et $F = \{0\}$. On définit R_{I_0} comme l'image du sous-groupe $\tilde{R}_{1, a_m-1}$ de $\mathrm{GL}(a_m)$ par le plongement η_m .

Supposons I_0 non vide, de sorte que $m' \in I_0$. Nous distinguons deux cas, suivant que $m' = m$ ou $m' = m - 1$.

Supposons que $m' = m$. Dans ce cas, on a $l < \frac{n}{2}$, a_m est impair et F est non nul. Si $\nu \in F$ est un vecteur non isotrope, on définit le groupe $R_{\{m\}}^\nu$ comme étant le sous-groupe du produit $R_m \mathrm{O}(F \cap \nu^\perp)$ constitué des éléments de la forme gh avec $g \in R_m$ et $h \in \mathrm{O}(F \cap \nu^\perp)$ tels que $\det h = \epsilon(g)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l = p$, on choisit un élément non isotrope $\nu \in F$ et on pose $R_{\{m\}} = R_{\{m\}}^\nu$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l < p$ on choisit deux éléments non isotropes ν^+ et ν^- de F tels que $B(\nu^+, \nu^+) > 0$ et $B(\nu^-, \nu^-) < 0$, et on pose $R_{\{m\}}^\pm = R_{\{m\}}^{\nu^\pm}$.

Finalement on pose $R_{I_0} = R_{I_0 \setminus \{m\}} \times R_{\{m\}}$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l = p$, et $R_{I_0}^\pm = R_{I_0 \setminus \{m\}} \times R_{\{m\}}^\pm$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l < p$.

Supposons que $m' = m - 1$. Dans ce cas $l = \frac{n}{2}$ est impair, a_{m-1} est impair et a_m est pair. On pose alors $R_{I_0} = R_{I_0 \setminus \{m-1\}} \times R_{\{m-1\}}$, et $R_{I_0}^\pm = R_{I_0 \setminus \{m-1\}} \times R_{\{m-1\}}^\pm$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l < p$.

Enfin, si $I_0 = \emptyset$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l = p$, on pose $R = \prod_{i \in \mathcal{J}'} R_i \times \prod_{J \in \mathcal{C}} R_J \times R_{I_0}$. Si I_0 est non vide, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l < p$, on pose $R^\pm = \prod_{i \in \mathcal{J}'} R_i \times \prod_{J \in \mathcal{C}} R_J \times R_{I_0}^\pm$. Il convient de remarquer que tous les sous-groupes apparaissant dans les produits considérés commutent deux à deux et qu'en fait ces produits sont des produits directs.

Théorème 2.2. *On suppose que la composition $\underline{a}'$ associée à $\underline{a}$ vérifie la condition $(*)$ de sorte que l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}(\underline{a})$ est quasi-réductive.*

- (i) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les sous-groupes réductifs canoniques de $P(\underline{a})$ sont tous conjugués à R .*
- (ii) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l = p$ ou $I_0 = \emptyset$, les sous-groupes réductifs canoniques de $P(\underline{a})$ sont tous conjugués à R .*
- (iii) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $I_0 \neq \emptyset$ et $l < p$, il y a deux classes de conjugaison de sous-groupes réductifs canoniques de $P(\underline{a})$ dont un système de représentants est $\{R^+, R^-\}$.*

Preuve. La démonstration suit celle de [4], théorème 5.10. On raisonne par récurrence sur n . Si $\underline{a}$ est vide le résultat est évident. On suppose donc que $\underline{a}$ est non vide et que $\underline{a}'$ vérifie la condition $(*)$. On pose $P = P(\underline{a})$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\underline{a})$.

Supposons qu'il existe $1 \leq i \leq m$ tel que l_i soit pair et posons $\underline{b} = (a_1, \dots, a_i)$, $\underline{c} = (a_{i+1}, \dots, a_m)$. On pose $V_i^* = \langle f_i, \dots, f_1 \rangle$ qui est un sous-espace isotrope supplémentaire dans E de l'orthogonal $V_i^\perp$ de V_i pour B et $E_{\underline{b}} = V_i \oplus V_i^*$ et $E_{\underline{c}} = (V_i \oplus V_i^*)^\perp$. La restriction de B à $E_{\underline{b}}$ est non dégénérée et on a $E = E_{\underline{b}} \oplus E_{\underline{c}}$. Les compositions $\underline{b}$ et $\underline{c}$ vérifient la condition $(*)$ relativement respectivement aux sous-espaces $E_{\underline{b}}$ et $E_{\underline{c}}$. On identifie $\mathrm{SO}(E_{\underline{b}})$ (resp. $\mathrm{SO}(E_{\underline{c}})$) avec le sous-groupe de $\mathrm{SO}(E)$ laissant invariant $E_{\underline{b}}$ (resp. $E_{\underline{c}}$) et agissant trivialement dans $E_{\underline{c}}$ (resp. $E_{\underline{b}}$). Soit alors $P' = P(\underline{b})$ (resp. $P'' = P(\underline{c})$) vu comme un sous-groupe de $\mathrm{SO}(E_{\underline{b}})$ (resp. $\mathrm{SO}(E_{\underline{c}})$) et R' (resp. R'') un sous-groupe réductif canonique de P' (resp. P''). Utilisant [2], lemmes 4.4 et 4.5, on montre, comme dans [4], que $R' \times R''$ est un sous-groupe réductif canonique de P et que tout sous-groupe réductif canonique de P est conjugué à un tel sous-groupe.

Raisonnant alors par récurrence, on voit que l'on se ramène à établir le résultat dans l'un des cas suivants :

- (i) $m = 1$ et $a_1 = \frac{n}{2}$ est pair,
- (ii) $m = 1$ et a_1 est impair,
- (iii) $m = 2$, a_1 est impair et $a_1 + a_2 = \frac{n}{2}$ est pair,
- (iv) $m = 2$, a_1 est impair et $a_1 + a_2 = \frac{n}{2}$ est impair.

Cas (i) : Ici, $m' = m = 1$, $a_1 = l = p = \frac{n}{2}$ est pair, $\mathcal{J}' = \emptyset$, $\mathcal{P}' = \{1\}$, $F = \{0\}$ et $I_0 = \emptyset$. Il s'agit de montrer que $R = R_1$. L'image $P(0)$ de $\mathrm{GL}(a_1)$ par le plongement η_1 est un facteur réductif de P et $\mathfrak{p}(1)$, le radical unipotent de $\mathfrak{p}$, est constitué des matrices de la forme

$$Z(V) = \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $V \in M_{a_1}(\mathbb{K})$ telle que la matrice $V\gamma_{a_1}$ soit antisymétrique. On considère alors $\mathfrak{p}(1)$, muni de l'action adjointe de $P(0)$, comme un $\mathrm{GL}(a_1)$ -module.

Si $\xi \in M_{a_1}(\mathbb{K})$ est une matrice antisymétrique, on note φ_ξ la forme linéaire sur $\mathfrak{p}(1)$ telle que $\langle \varphi_\xi, Z(V) \rangle = \mathrm{Tr} V\gamma_{a_1}\xi$. Alors l'application $\xi \mapsto \varphi_\xi$ est un isomorphisme de $\mathrm{GL}(a_1)$ -modules de l'espace des matrices antisymétriques d'ordre a_1 sur $\mathfrak{p}(1)^*$. On voit que l'orbite de $\varphi_{\iota_{a_1/2}}$ sous $P(0)$ est ouverte. Il suit alors de [2], lemme 4.4, que $P(0)_{\varphi_{\iota_{a_1/2}}} = R_1$ est un sous-groupe réductif canonique de P .

Cas (ii) : Ici, $P(0)$ désigne le facteur réductif de P constitué des matrices

$$g(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{a_1} {}^t A^{-1} \gamma_{a_1} \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathrm{GL}(a_1)$ et $B \in \mathrm{SO}(F)$, c'est à dire vérifiant ${}^t B \kappa_{p-a_1, e} B = \kappa_{p-a_1, e}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}(0)$ de $P(0)$ est constituée des matrices

$$X(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{a_1} {}^t A \gamma_{a_1} \end{pmatrix}$$

avec $A \in M_{a_1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{so}(F)$ l'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}(F)$. On identifie $\mathrm{GL}(a_1) \times \mathrm{SO}(F)$ (resp. $M_{a_1}(\mathbb{K}) \times \mathfrak{so}(F)$) avec $P(0)$ (resp. $\mathfrak{p}(0)$) au moyen de l'isomorphisme $(A, B) \mapsto g(A, B)$ (resp. $(A, B) \mapsto X(A, B)$).

On désigne par $\mathfrak{p}(2)$ (resp. $\mathfrak{p}(1)$) le sous-espace de $\mathfrak{p}$ constitué des matrices

$$Z(V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & V \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{resp. } Y(U) = \begin{pmatrix} 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{p-a_1, e} {}^t U \gamma_{a_1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

avec $V \in M_{a_1}(\mathbb{K})$ telle que la matrice $V \gamma_{a_1}$ soit antisymétrique (resp. $U \in M_{a_1, n-2a_1}(\mathbb{K})$). Alors on a la graduation d'algèbre de Lie, invariante sous l'action adjointe de $P(0)$, ${}^u \mathfrak{p} = \mathfrak{p}(1) \oplus \mathfrak{p}(2)$. On considère $\mathfrak{p}(1)$ et $\mathfrak{p}(2)$ comme des $\mathrm{GL}(a_1) \times \mathrm{SO}(F)$ -modules. L'action de $\mathrm{SO}(F)$ sur $\mathfrak{p}(2)$ est triviale.

Si $\xi \in M_{a_1}(\mathbb{K})$ est une matrice antisymétrique, on note φ_ξ la forme linéaire sur $\mathfrak{p}(2)$ telle que $\langle \varphi_\xi, Z(V) \rangle = \mathrm{Tr} V \gamma_{a_1} \xi$. On prolonge l'action naturelle de $\mathrm{GL}(a_1)$ dans l'espace des matrices antisymétriques d'ordre a_1 à $\mathrm{GL}(a_1) \times \mathrm{SO}(F)$ en faisant agir trivialement le facteur $\mathrm{SO}(F)$. Alors l'application $\xi \mapsto \varphi_\xi$ est un isomorphisme de $\mathrm{GL}(a_1) \times \mathrm{SO}(F)$ -modules de l'espace des matrices antisymétriques d'ordre a_1 sur $\mathfrak{p}(2)^*$. Soit $\xi_0 \in M_{a_1}(\mathbb{K})$ la matrice antisymétrique de rang maximal

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} \iota_{[a_1/2]} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'orbite de $\varphi_0 = \varphi_{\xi_0}$ sous l'action de $\mathrm{GL}(a_1)$ et donc de $P(0)$ est ouverte dans $\mathfrak{p}(2)^*$. Soit β la forme bilinéaire antisymétrique sur V_1 dont la matrice dans la base $e_1, \dots, e_{a_1}$ est ξ_0 . Si a est un entier naturel, on désigne par $\mathrm{GSp}(a)$ le sous-groupe des matrices $A \in \mathrm{GL}(2a)$ qui vérifient ${}^t A^{-1} \iota_a A^{-1} = \lambda(A) \iota_a$ avec $\lambda(A) \in \mathbb{K}^\times$. Il est clair que λ est un caractère rationnel de $\mathrm{GSp}(a)$. On note $\mathfrak{gsp}(a)$ l'algèbre de Lie de $\mathrm{GSp}(a)$. Le noyau de β est $\mathbb{K} e_{a_1}$ et on a

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(a_1)_\beta &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ {}^t u & a \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{Sp}([\frac{a_1}{2}]), a \in \mathbb{K}^\times, u \in \mathbb{K}^{a_1-1} \right\} \\ \mathrm{GL}(a_1)_{\mathbb{K}\beta} &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ {}^t u & a \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{GSp}([\frac{a_1}{2}]), a \in \mathbb{K}^\times, u \in \mathbb{K}^{a_1-1} \right\}. \end{aligned}$$

Il est immédiat que le caractère λ de $\mathrm{GSp}([\frac{a_1}{2}])$ est la restriction du caractère rationnel encore noté λ de $\mathrm{GL}(a_1)_{\mathbb{K}\beta}$ tel que ${}^t A^{-1} \xi_0 A^{-1} = \lambda(A) \xi_0$, $A \in \mathrm{GL}(a_1)_{\mathbb{K}\beta}$. On note également λ la différentielle du caractère λ .

On a alors

$$\begin{aligned} P(0)_{\varphi_0} &= \mathrm{GL}(a_1)_\beta \times \mathrm{SO}(F) \\ P(0)_{\mathbb{K}\varphi_0} &= \mathrm{GL}(a_1)_{\mathbb{K}\beta} \times \mathrm{SO}(F) \\ P(\mathbb{K}\varphi_0) &= P(0)_{\mathbb{K}\varphi_0} {}^uP. \end{aligned}$$

On distingue trois sous-cas.

a) $a_1 = \frac{n}{2}$. Ici $m' = m - 1 = 0$, $\mathcal{J}' = \mathcal{P}' = \emptyset$, $I_0 = \emptyset$, $F = \{0\}$ et $\mathfrak{p}(1) = \{0\}$. Il s'agit de montrer que $R = \eta_1(\tilde{R}_{1,a_1-1})$.

Comme $F = \{0\}$, on écrit $g(A)$ au lieu de $g(A, B)$ et $X(A)$ au lieu de $X(A, B)$. D'après [2], lemme 4.4, l'algèbre de Lie $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}(0)(\varphi_0)$ est fortement quasi-réductive et tout sous-groupe réductif canonique de P est conjugué à un sous-groupe réductif canonique de $Q = P(0)_{\varphi_0} = \mathrm{GL}(a_1)_\beta$. Le sous-groupe $Q(0)$ de Q tel que

$$Q(0) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{Sp}([\frac{a_1}{2}]), a \in \mathbb{K}^\times \right\}$$

est un facteur réductif de Q et l'application $(A, a) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ est un isomorphisme naturel de $\mathrm{Sp}([\frac{a_1}{2}]) \times \mathbb{K}^\times$ sur $Q(0)$. Pour $u \in \mathbb{K}^{a_1-1}$, soit $A_u \in M_{a_1}(\mathbb{K})$ la matrice telle que

$$A_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t_u & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathfrak{q}(1) = \{X(A_u) \mid u \in \mathbb{K}^{a_1-1}\}$ est le radical unipotent de l'algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ de Q . Si pour $v \in \mathbb{K}^{a_1-1}$, on désigne par ψ_v la forme linéaire sur $\mathfrak{q}(1)$ telle que $\langle \psi_v, X(A_u) \rangle = t_{uv}$, l'application $v \mapsto \psi_v$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^{a_1-1}$ sur $\mathfrak{q}(1)^*$, dont l'inverse transporte l'action coadjointe de $Q(0)$ en l'action telle que $(A, a).v = a^{-1}Av$, $(A, a) \in \mathrm{Sp}([\frac{a_1}{2}]) \times \mathbb{K}^\times$, $v \in \mathbb{K}^{a_1-1}$. Il est clair que l'ouvert $\mathbb{K}^{a_1-1} \setminus \{0\}$ est une orbite sous l'action de $Q(0)$. Prenant $v = e_{a_1-1}$ et appliquant [2], lemme 4.4, on voit que l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}(0)_{e_{a_1-1}}$ est fortement quasi-réductive et tout sous-groupe réductif canonique de Q est conjugué à un sous-groupe réductif canonique de $\tilde{Q} = Q(0)_{e_{a_1-1}}$. Il est immédiat que l'application $(A, a) \mapsto A$ est un isomorphisme de $\tilde{Q} = Q(0)_{e_{a_1-1}}$ sur le sous-groupe de $\mathrm{Sp}([\frac{a_1}{2}])$ laissant invariant $\mathbb{K}e_{a_1-1}$, l'isomorphisme réciproque étant donné par $A \mapsto (A, a)$ où $a \in \mathbb{K}^\times$ est tel que $Ae_{a_1-1} = ae_{a_1-1}$.

L'application

$$(A, a) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

permet d'identifier $\mathrm{Sp}([\frac{a_1}{2}]-1) \times \mathbb{K}^\times$ avec un facteur réductif de $\tilde{Q}$ noté $\tilde{Q}(0)$ et si $\tilde{\mathfrak{q}}$ désigne l'algèbre de Lie de $\tilde{Q}$, on a la graduation $\tilde{Q}(0)$ -invariante ${}^u\tilde{\mathfrak{q}} = \tilde{\mathfrak{q}}(1) \oplus \tilde{\mathfrak{q}}(2)$,

où

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{q}}(1) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & -tx\iota_{\frac{a_1-3}{2}} & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{K}^{a_1-3} \right\} \\ \tilde{\mathfrak{q}}(2) &= \left\{ \tilde{Z}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{K} \right\}.\end{aligned}$$

Le vecteur $\tilde{Z}(1)$ est donc une base de $\tilde{\mathfrak{q}}(2)$ et on note $\tilde{Z}(1)^*$ la base duale. On vérifie que ${}^u\tilde{\mathfrak{q}}$ est une algèbre de Lie de Heisenberg dont le centre est $\tilde{\mathfrak{q}}(2)$ et que la $\tilde{Q}(0)$ -orbite de $\tilde{Z}(1)^*$ est ouverte dans $\tilde{\mathfrak{q}}(2)^*$. Appliquant alors [2], lemme 4.5, on voit que tout sous-groupe réductif canonique de P est conjugué à $\tilde{Q}(0)_{\tilde{Z}(1)^*} = \eta_1(\tilde{R}_{1,a_1-1})$.

b) $a_1 = 1 < \frac{n}{2}$. Ici $m' = m = 1$, $\mathcal{S}' = \{1\}$, $\mathcal{P}' = \emptyset$, $I_0 = \{1\}$, $F \neq 0$ est le sous-espace engendré par $e_2, \dots, e_p, g_1, \dots, g_e, f_p, \dots, f_2$ et $\mathfrak{p}(2) = \{0\}$. Il s'agit de montrer qu'il existe un vecteur non isotrope $\nu \in F$ tel que R soit le sous-groupe constitué des éléments $g \in \mathrm{SO}(E)$ laissant invariant F et $\mathbb{K}\nu$ et vérifiant $ge_1 = \det(g|_{F \cap \nu^\perp})e_1$.

Le radical unipotent $\mathfrak{p}(1)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ est isomorphe à $F = \mathbb{K}^{n-2}$ via l'application

$$u \mapsto Y({}^tu) = \begin{pmatrix} 0 & {}^tu & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{p-1,e}u \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On identifie $\mathfrak{p}(1)^*$ à $\mathbb{K}^{n-2} = F$ via l'application $\nu \mapsto \psi_\nu$ où $\langle \psi_\nu, Y({}^tu) \rangle = {}^tu\nu$. Le facteur réductif $P(0)$ de P est isomorphe à $\mathbb{K}^\times \times \mathrm{SO}(F)$ et l'action coadjointe de $P(0)$ dans $\mathfrak{p}(1)^* = \mathbb{K}^{n-2} = F$ est donnée par $(a, B) \cdot \nu = a^{-1}B\nu$.

L'orbite sous $P(0)$ d'un vecteur non isotrope ν est ouverte et

$$P(0)_\nu = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid B \in \mathrm{O}(F \cap \nu^\perp), a = \det B \right\}.$$

Le résultat cherché est alors conséquence de [2] Lemme 4.4 et du fait que, d'après le théorème de Witt, la famille de sous-groupes de $\mathrm{SO}(F)$ constituée des $\mathrm{O}(F \cap \nu^\perp)$ avec $\nu \in F$ vecteur non isotrope, forme une seule classe de conjugaison si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et est constituée de deux classes de conjugaison, celles des $\mathrm{O}(F \cap \nu^\perp)$ avec $B(\nu, \nu) > 0$ d'une part et $B(\nu, \nu) < 0$ d'autre part si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

c) $1 < a_1 < \frac{n}{2}$. Ici $m' = m = 1$, $\mathcal{S}' = \{1\}$, $\mathcal{P}' = \emptyset$, $I_0 = \{1\}$, $F \neq 0$ est le sous-espace engendré par $e_{a_1+1}, \dots, e_p, g_1, \dots, g_e, f_p, \dots, f_{a_1+1}$ et $\mathfrak{p}(2) \neq \{0\}$. Il s'agit de montrer que $R = R_{\{1\}}^\nu$ pour un vecteur non isotrope $\nu \in F$ et que l'ensemble de ces sous-groupes est une seule classe de conjugaison si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et la réunion de deux telles classes si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Le noyau $\mathfrak{a}$ de φ_0 est un idéal $P_{\mathbb{K}\varphi_0}$ -invariant de ${}^u\mathfrak{p}$. Soit A le sous-groupe unipotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de $P_{\mathbb{K}\varphi_0}$ et soit $\tilde{P}$ le groupe algébrique quotient $P_{\mathbb{K}\varphi_0}/A$. Via la forme linéaire φ_0 , on identifie le quotient $\mathfrak{p}(2)/\mathfrak{a}$ à $\mathbb{K}$. Alors $\mathfrak{n} = {}^u\mathfrak{p}/\mathfrak{a} = \mathfrak{p}(1) \oplus \mathbb{K}$ est un idéal unipotent $\tilde{P}$ -invariant de l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{p}}$

de $\tilde{P}$ dont $\mathbb{K}$ est un idéal central $\tilde{P}$ -invariant et tel que $[\mathfrak{p}(1), \mathfrak{p}(1)] \subset \mathbb{K}$. Le groupe $N = {}^uP/A$ est le sous-groupe unipotent de $\tilde{P}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$. On pose $\tilde{P}(0) = P(0)_{\mathbb{K}\varphi_0}$ et on note $\tilde{\mathfrak{p}}(0)$ l'algèbre de Lie de $\tilde{P}(0)$. Alors, on a $\tilde{P} = \tilde{P}(0)N$ et $\tilde{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathfrak{p}}(0) \oplus \mathfrak{n} = \tilde{\mathfrak{p}}(0) \oplus \mathfrak{p}(1) \oplus \mathbb{K}$.

Comme l'orbite de φ_0 sous $P(0)$ est ouverte dans $\mathfrak{p}(2)^*$, il résulte de [2] Lemme 4.3 que l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{p}}$ est fortement quasi-réductive et tout sous-groupe réductif canonique de P est conjugué à un sous-groupe réductif canonique de $\tilde{P}$.

Soit W le sous-espace de V_1 engendré par $e_1, \dots, e_{a_1-1}$. Alors la restriction de β à W est la forme symplectique dont la matrice dans la base $e_1, \dots, e_{a_1-1}$ est $\iota_{[\frac{a_1}{2}]}$. De plus $\mathbb{K}e_{a_1}$ est le noyau de β .

Si $v \in \mathbb{K}^{n-2a_1} = F$ on désigne par $\tilde{v}$ l'élément de $M_{a_1, n-2a_1}(\mathbb{K})$ qui s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} 0 \\ \iota_v \end{pmatrix}$ et on pose $\eta(v) = Y(\tilde{v})$. Soit $\tilde{\mathfrak{a}} = \{\eta(v) | v \in \mathbb{K}^{n-2a_1}\} \oplus \mathbb{K}$. Si $w \in \mathbb{K}^{n-2a_1}$, on note $w' \in \mathbb{K}^{n-2a_1-1}$ le vecteur obtenu en supprimant la dernière coordonnée de w . On vérifie que si $v \in \mathbb{K}^{n-2a_1}$ et $V \in M_{a_1, n-2a_1}$, on a $[Y(V), \eta(v)] = Z(W)$ avec $W = \begin{pmatrix} 0 & w' \\ -\iota_{w'} & 0 \end{pmatrix}$, où $w = V\kappa_{p-a_1, e}v$. On en déduit facilement que $\tilde{\mathfrak{a}}$ est un idéal abélien central $\tilde{P}$ -invariant de $\mathfrak{n}$. En particulier, l'action coadjointe de $\tilde{P}$ dans $\tilde{\mathfrak{a}}^*$ passe au quotient par N en une action de $\tilde{P}(0)$.

Soit $\nu \in \mathbb{K}^{n-2a_1} = F$ un vecteur non isotrope et soit $\varphi \in \tilde{\mathfrak{a}}^*$ la forme linéaire telle que $\varphi|_{\mathbb{K}}$ soit la forme linéaire induite par φ_0 et que $\langle \varphi, \eta(v) \rangle = \iota_v \nu$, $v \in \mathbb{K}^{n-2a_1} = F$. On vérifie que l'orbite de φ sous $\tilde{P}(0)$ est ouverte dans $\tilde{\mathfrak{a}}^*$ et que

$$\begin{aligned} \tilde{P}(0)_{\mathbb{K}\varphi} &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ \iota_u & a \end{pmatrix}, B \right) \mid A \in \mathrm{GSp}([\tfrac{a_1}{2}]), u \in \mathbb{K}^{a_1-1}, a \in \mathbb{K}^\times, \right. \\ &\quad \left. B \in \mathrm{O}(F \cap \nu^\perp), \lambda(A) = a^{-1} \det B \right\} \\ \tilde{\mathfrak{p}}(0)_{\mathbb{K}\varphi} &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ \iota_u & a \end{pmatrix}, B \right) \mid A \in \mathfrak{gsp}([\tfrac{a_1}{2}]), u \in \mathbb{K}^{a_1-1}, a \in \mathbb{K}, \right. \\ &\quad \left. B \in \mathfrak{so}(F), B\nu = 0, \lambda(A) + a = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Il est clair que N est contenu dans $\tilde{P}_{\mathbb{K}\varphi}$. Soit $\mathfrak{b} \subset \tilde{\mathfrak{a}}$ le noyau de φ . C'est un idéal $\tilde{P}_{\mathbb{K}\varphi}$ -invariant et si on désigne par $B \subset N$ le sous-groupe unipotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$, on pose $Q = \tilde{P}_{\mathbb{K}\varphi}/B$. Il est clair que $\tilde{P}(0)_{\mathbb{K}\varphi}$ s'identifie, via la projection naturelle, à un sous-groupe algébrique de Q .

Il suit alors de [2] Lemme 4.3 que l'algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ de Q est fortement quasi-réductive et tout sous-groupe réductif canonique de $\tilde{P}$ est conjugué à un sous-groupe réductif canonique de Q .

Soit

$$\begin{aligned} Q(0) &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, B \right) \mid A \in \mathrm{GSp}([\tfrac{a_1}{2}]), a \in \mathbb{K}^\times, B \in \mathrm{O}(F \cap \nu^\perp), \right. \\ &\quad \left. \lambda(A) = a^{-1} \det B \right\}. \end{aligned}$$

Alors $Q(0)$ est un facteur réductif de Q . Soit $\mathfrak{q}(0)$ l'algèbre de Lie de $Q(0)$. Si

$u \in \mathbb{K}^{a_1-1}$, on pose

$$\theta(u) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ {}^t u & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \in \tilde{\mathfrak{p}}(0)_{\mathbb{K}\varphi}.$$

Si $V \in M_{a_1-1, n-2a_1}(\mathbb{K})$, on désigne par $\tilde{V}$ l'élément de $M_{a_1, n-2a_1}(\mathbb{K})$ qui s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}$ et on pose $\tau(V) = Y(\tilde{V})$. On a $\mathfrak{n} = \text{Im } \tau \oplus \tilde{\mathfrak{a}}$. Via la forme linéaire φ , on identifie le quotient $\tilde{\mathfrak{a}}/\mathfrak{b}$ à $\mathbb{K}$. On a donc $\mathfrak{n}/\mathfrak{b} = \text{Im } \tau \oplus \mathbb{K} \subset \mathfrak{q}$.

On pose $\mathfrak{q}(1) = \text{Im } \theta \oplus \text{Im } \tau$. Alors, $\mathfrak{q}(1)$ est un sous-espace $Q(0)$ -invariant de ${}^u\mathfrak{q}$, ${}^u\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(1) \oplus \mathbb{K}$ et $[\mathfrak{q}(1), \mathfrak{q}(1)] \subset \mathbb{K}$. Plus précisément, pour $u, v \in \mathbb{K}^{a_1-1}$ et $U, V \in M_{a_1-1, n-2a_1}(\mathbb{K})$, on a

$$[\theta(u) + \tau(U), \theta(v) + \tau(V)] = ({}^t u V - {}^t v U)\nu + 2 \text{Tr}(U \kappa_{p-a_1, e} {}^t V \iota_{[\frac{a_1}{2}]})\nu.$$

Soit $(u, U) \in \mathbb{K}^{a_1-1} \times M_{a_1-1, n-2a_1}(\mathbb{K})$ tel que le crochet précédent soit nul pour tout $(v, V) \in \mathbb{K}^{a_1-1} \times M_{a_1-1, n-2a_1}(\mathbb{K})$. Faisant $V = 0$, on voit que U vérifie $U\nu = 0$. On en déduit ensuite que, pour tout V tel que $V\nu = 0$, $\text{Tr}(\iota_{[\frac{a_1}{2}]} U \kappa_{p-a_1, e} {}^t V) = 0$; autrement dit, U vérifie $U\nu = 0$ et $U \kappa_{p-a_1, e} v = 0$, pour tout vecteur $v \in \mathbb{K}^{n-2a_1}$ tel que ${}^t v \nu = 0$. Comme ν est non isotrope, on en déduit que $U = 0$. Finalement, on a ${}^t u V \nu = 0$ pour tout $V \in M_{a_1-1, n-2a_1}$, de sorte que $u = 0$. Ainsi ${}^u\mathfrak{q}$ est une algèbre de Heisenberg de centre $\mathbb{K}$. De plus, l'orbite de $\varphi|_{\mathbb{K}}$ sous $Q(0)$ est ouverte. Il suit donc de [2], Lemme 4.5, que tout sous-groupe réductif canonique de P est conjugué à un sous-groupe réductif canonique de $Q(0)_{\varphi}$. Or, on a

$$Q(0)_{\varphi} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, B \right) \mid A \in \text{Sp}([\frac{a_1}{2}]), a \in \mathbb{K}^{\times}, B \in \text{O}(F \cap \nu^{\perp}), 1 = a^{-1} \det B \right\}.$$

Comme $P(0) = \text{GL}(a_1) \times \text{SO}(F)$ et comme les sous-groupes de $\text{O}(F)$, $\text{O}(F \cap \nu^{\perp})$ avec $\nu \in F$ vecteur non isotrope, forment une seule classe de conjugaison si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et deux telles classes si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, notre résultat en découle.

Cas (iii) et (iv) : Soit Q le sous-groupe parabolique de $\text{GL}(\frac{n}{2})$ stabilisant le drapeau $\mathcal{V} = \{\{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 = \mathbb{K}^{\frac{n}{2}}\}$ et $\mathfrak{q}$ son algèbre de Lie. Soit

$$P(0) = \left\{ g(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \gamma_{\frac{n}{2}} {}^t A^{-1} \gamma_{\frac{n}{2}} \end{pmatrix} \mid A \in Q \right\},$$

qui est un sous-groupe algébrique de P , naturellement isomorphe à Q auquel on l'identifie via l'application $A \mapsto g(A)$ et dont on note $\mathfrak{p}(0)$ l'algèbre de Lie. Soit

$$\mathfrak{p}(1) = \left\{ X(V) = \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid V \in M_{\frac{n}{2}}(\mathbb{K}), V \gamma_{\frac{n}{2}} \text{ antisymétrique} \right\}.$$

Alors $\mathfrak{p}(1)$ est un idéal unipotent abélien P -invariant de $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(0) \oplus \mathfrak{p}(1)$. On considère $\mathfrak{p}(1)$ comme un Q -module.

Si $\xi \in M_{\frac{n}{2}}(\mathbb{K})$ est une matrice antisymétrique, on note φ_{ξ} la forme linéaire sur $\mathfrak{p}(1)$ telle que $\langle \varphi_{\xi}, X(V) \rangle = \text{Tr } V \gamma_{\frac{n}{2}} \xi$. Alors l'application $\xi \mapsto \varphi_{\xi}$ est un isomorphisme de Q -modules de l'espace des matrices antisymétriques d'ordre $\frac{n}{2}$ sur $\mathfrak{p}(1)^*$.

Soit ξ_0 la matrice dans la base $e_1, \dots, e_{\frac{n}{2}}$ de la forme alternée

$$\beta = \sum_{1 \leq 2i \leq a_1} e_i^* \wedge e_{a_1-i}^* + \sum_{0 \leq 2i < \frac{n}{2} - a_1} e_{a_1+i}^* \wedge e_{2[\frac{n}{4}] - i}^*.$$

On pose $\varphi_0 = \varphi_{\xi_0}$. Comme la forme symplectique β est générique relativement au drapeau $\mathcal{V}$ (voir [3] Définition 9), la $P(0)$ -orbite de φ_0 est ouverte. Il suit alors de [2], Lemme 4.4 que l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}(0)_{\varphi_0}$ est fortement quasi-réductive et tout sous-groupe réductif canonique de P est conjugué à un sous-groupe réductif canonique de $\tilde{P} = P(0)_{\varphi_0}$. On note $\tilde{\mathfrak{p}}$ l'algèbre de Lie de $\tilde{P}$.

Cas (iii) : Ici $m' = m = 2$, $a_1 + a_2 = \frac{n}{2}$, $\mathcal{J}' = \{1, 2\}$ est connexe, $\mathcal{P}' = \emptyset$, $F = \{0\}$ et $I_0 = \emptyset$. Il s'agit de montrer que $R = R_{\mathcal{J}'} = R_1$.

La matrice de la forme symplectique β dans la base $e_1, \dots, e_{\frac{n}{2}}$ est

$$J = \begin{pmatrix} \iota_{[\frac{a_1}{2}]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \iota_{[\frac{a_2}{2}]} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\tilde{P}(0) = \left\{ g(A, B, a) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{Sp}([\frac{a_1}{2}]), B \in \mathrm{Sp}([\frac{a_2}{2}]), a \in \mathbb{K}^\times \right\}.$$

Alors $\tilde{P}(0)$ est un facteur réductif de $\tilde{P}$ dont on note $\tilde{\mathfrak{p}}(0)$ l'algèbre de Lie.

On considère les sous-espaces de $\tilde{\mathfrak{p}}$

$$\tilde{\mathfrak{p}}(1) = \left\{ Y(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\iota_{[\frac{a_1}{2}]}u \\ {}^t u & 0 & {}^t v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\iota_{[\frac{a_2}{2}]}v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{K}^{a_1-1}, v \in \mathbb{K}^{a_2-1} \right\}$$

$$\tilde{\mathfrak{p}}(2) = \left\{ Z(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, w \in \mathbb{K} \right\}.$$

Alors, on a la graduation $\tilde{P}(0)$ -invariante ${}^u \tilde{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathfrak{p}}(1) \oplus \tilde{\mathfrak{p}}(2)$ et ${}^u \tilde{\mathfrak{p}}$ est une algèbre de Lie de Heisenberg dont $\tilde{\mathfrak{p}}(2)$ est le centre. Plus précisément, on a

$$[Y(u, v), Y(u', v')] = 2Z({}^t u' \iota_{a_1} u + {}^t v' \iota_{a_1} v), u, u' \in \mathbb{K}^{a_1-1}, v, v' \in \mathbb{K}^{a_2-1}.$$

De plus, l'action coadjointe de $\tilde{P}(0)$ dans $\tilde{\mathfrak{p}}(2)^*$ est donnée par

$$g(A, B, a).Z(1)^* = a^2 Z(1)^*.$$

Notre assertion résulte donc encore de [2], lemme 4.5.

Cas (iv) : Ici $m' = m - 1 = 1$, $\mathcal{J}' = \{1\}$, $\mathcal{P}' = \emptyset$, a_2 est pair, $F = \{0\}$, $I_0 = \{1\}$. Il s'agit de montrer que $R = R_1$.

La matrice de la forme β dans la base $e_1, \dots, e_{\frac{n}{2}}$ est

$$J = \begin{pmatrix} \iota_{[\frac{a_1}{2}]} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \iota_{\frac{a_2}{2}-1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\tilde{P}(0) = \left\{ g(A, B, a, b) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mid A \in \text{Sp}([\frac{a_1}{2}]), \right. \\ \left. B \in \text{Sp}(\frac{a_2}{2} - 1), a, b \in \mathbb{K}^\times \right\}.$$

Alors $\tilde{P}(0)$ est un facteur réductif de $\tilde{P}$ dont on note $\tilde{\mathfrak{p}}(0)$ l'algèbre de Lie.

On considère les sous-espaces de $\tilde{\mathfrak{p}}$

$$\tilde{\mathfrak{p}}(1) = \left\{ Y(u, v, x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\iota_{[\frac{a_1}{2}]}u & 0 \\ {}^t u & 0 & {}^t v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\iota_{\frac{a_2}{2}-1}v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t x & 0 & 0 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{K}^{a_1-1}, v, x \in \mathbb{K}^{a_2-2} \right\}$$

$$\tilde{\mathfrak{p}}(2) = \left\{ Z(w, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}, w, t \in \mathbb{K} \right\}.$$

Alors, on a la graduation $\tilde{P}(0)$ -invariante ${}^u \tilde{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathfrak{p}}(1) \oplus \tilde{\mathfrak{p}}(2)$. Plus précisément, pour $u, u' \in \mathbb{K}^{a_1-1}$, $v, v', x, x' \in \mathbb{K}^{a_2-2}$, on a

$$[Y(u, v, x), Y(u', v', x')] = Z(2({}^t u' \iota_{[\frac{a_1}{2}]} u + {}^t v' \iota_{[\frac{a_1}{2}]} v), {}^t x' \iota_{\frac{a_2}{2}-1} v - {}^t x \iota_{\frac{a_2}{2}-1} v').$$

Soit Z_1, Z_2 la base de $\tilde{\mathfrak{p}}(2)$ telle que $Z_1 = Z(1, 0)$ et $Z_2 = Z(0, 1)$. L'action coadjointe de $\tilde{P}(0)$ dans $\tilde{\mathfrak{p}}(2)^*$ est donnée par

$$\begin{aligned} g(A, B, a, b).Z_1^* &= a^{-2}Z_1^* \\ g(A, B, a, b).Z_2^* &= a^{-1}b^{-1}Z_2^*. \end{aligned}$$

Notre assertion résulte donc encore de [2], lemme 4.5. ■

3. Le cas des sous-groupes stabilisant deux sous-espaces totalement isotropes maximaux croisés.

Dans cette section, on suppose que $p = q$ ou que $n = 2p$ est pair, de sorte que $p \geq 2$. On considère les sous-espaces isotropes maximaux croisés $V = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$ et $W = \langle e_p, f_{p-1}, \dots, f_1 \rangle$. On note $P_c^{\mathbb{K}}(p)$ le sous-groupe biparabolique stabilisant V et W , et $\mathfrak{p}_c^{\mathbb{K}}(p)$ son algèbre de Lie.

Supposons $p \geq 2$. Dans la suite, on convient que $\mathrm{GL}(0)$ est le groupe trivial. Si $g \in \mathrm{GL}(p-2)$ et $\epsilon \in \{\pm 1\}$, on note $\eta(g, \epsilon)$ la matrice de $\mathrm{GL}(p)$ telle que

$$\eta(g, \epsilon) = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad (1)$$

en convenant que si $p = 2$, la ligne et la colonne contenant g sont vides. On désigne par R le sous-groupe de $\mathrm{SO}(E)$, naturellement isomorphe à $\mathrm{GL}(p-2) \times \{\pm 1\}$, constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \eta(g, \epsilon) & 0 \\ 0 & \gamma_p {}^t \eta(g, \epsilon)^{-1} \gamma_p \end{pmatrix}, \quad (g, \epsilon) \in \mathrm{GL}(p-2) \times \{\pm 1\}.$$

Théorème 3.1. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_c^{\mathbb{K}}(p)$ est quasi-réductive et les sous-groupes réductifs canoniques de $P_c^{\mathbb{K}}(p)$ sont tous conjugués à R .*

Preuve. Posons $P = P_c^{\mathbb{K}}(p)$ et soit

$$P(0) = \left\{ g(A, a) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{p-1} {}^t A^{-1} \gamma_{p-1} \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{GL}(p-1), a \in \mathrm{GL}(1) = \mathbb{K}^\times \right\}.$$

Alors $P(0)$ est un facteur réductif de P , naturellement isomorphe à $\mathrm{GL}(p-1) \times \mathrm{GL}(1)$ auquel on l'identifie via l'application $(A, a) \mapsto g(A, a)$ et dont on note $\mathfrak{p}(0)$ l'algèbre de Lie. Soit

$$\mathfrak{p}(1) = \left\{ X(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v & 0 \\ {}^t u & 0 & 0 & -{}^t v \gamma_{p-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{p-1} u & 0 \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{K}^{p-1} \right\}.$$

Alors $\mathfrak{p}(1)$ est un idéal abélien de $\mathfrak{p}$ et on a $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(0) \oplus \mathfrak{p}(1)$. On déduit de ceci que P est isomorphe au produit semi-direct de $\mathrm{GL}(p-1) \times \mathrm{GL}(1)$ par $\mathbb{K}^{p-1} \times \mathbb{K}^{p-1}$, l'action de $\mathrm{GL}(p-1) \times \mathrm{GL}(1)$ dans $\mathbb{K}^{p-1} \times \mathbb{K}^{p-1}$ étant donnée par

$$(A, a).(u, v) = (a {}^t A^{-1} u, a A v), \quad (A, a) \in \mathrm{GL}(p-1) \times \mathrm{GL}(1) \text{ et } u, v \in \mathbb{K}^{p-1}.$$

Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^{p-1} \times \mathbb{K}^{p-1}$, on note $\varphi_{\alpha, \beta}$ la forme linéaire sur $\mathfrak{p}(1)$ telle que $\langle \varphi_{\alpha, \beta}, X(u, v) \rangle = (\alpha | u) + (\beta | v)$, où $(|)$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{K}^{p-1}$. Alors, l'application $(\alpha, \beta) \mapsto \varphi_{\alpha, \beta}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels

permettant d'identifier $\mathfrak{p}(1)^*$ et $\mathbb{K}^{p-1} \times \mathbb{K}^{p-1}$. On note $(e_1, \dots, e_{p-1})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{p-1}$. On vérifie que, pour l'action coadjointe dans $\mathfrak{p}(1)^* = \mathbb{K}^{p-1} \times \mathbb{K}^{p-1}$, $P(0)$ admet l'unique orbite ouverte $\mathcal{O} = \{(u, v) | (u|v) \neq 0\} = P(0)(e_{p-1}, e_{p-1})$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et les deux orbites ouvertes $\mathcal{O}^\pm = \{(u, v) | \pm (u|v) > 0\} = P(0)(e_{p-1}, \pm e_{p-1})$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Or le stabilisateur de $(e_{p-1}, \pm e_{p-1})$ dans $P(0)$ est le groupe R . Notre résultat est alors conséquence de [2], lemme 4.4. ■

4. Le cas des sous-groupes biparaboliques

4.1. Sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{SO}(E)$. Soit $l, s \leq p$ deux entiers naturels, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ deux compositions de respectivement l et s . Pour $1 \leq i \leq m$ (resp. $1 \leq i \leq t$), on pose $l_i = a_1 + \dots + a_i$ (resp. $s_i = b_1 + \dots + b_i$). On considère les drapeaux opposés de sous-espaces totalement isotropes $\mathcal{V} = \{V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_m\}$ et $\mathcal{W} = \{W_1 \subsetneq \dots \subsetneq W_t\}$ tels que, pour $1 \leq i \leq m$, V_i soit engendré par $e_1, \dots, e_{l_i}$ et, pour $1 \leq i \leq t$, W_i soit engendré par $f_{s_i}, \dots, f_1$. On désigne alors par $P_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \underline{b})$ le sous-groupe biparabolique de $\mathrm{SO}(E)$ qui stabilise les drapeaux $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ et par $\mathfrak{p}_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \underline{b})$ son algèbre de Lie.

Lorsque $s = 0$, $\underline{b} = \emptyset$ et, dans ce cas, $P_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \underline{b}) = P_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \emptyset)$ n'est autre que le sous-groupe parabolique $P(\underline{a})$.

Remarque 4.1. Si n est impair ou $p < q$, deux sous-groupes $P_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \underline{b})$ et $P_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a}' | \underline{b}')$ sont conjugués si et seulement si $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{a}', \underline{b}')$ ou $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}', \underline{a}')$.

Supposons que $n = 2p$ ou $p = q$. Il suit de la remarque 2.1 que tout sous-groupe biparabolique de $\mathrm{SO}(E)$ stabilisant une paire de drapeaux opposés est conjugué sous l'action de $\mathrm{O}(E)$ à un $P_{p,0}^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \underline{b})$ avec $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ (resp. $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$) une composition d'un entier $0 \leq l \leq p-1$ ou une composition de p avec dans ce cas $a_m > 1$ (resp. $b_t > 1$). De plus les sous-groupes $P_{p,0}^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \underline{b})$ et $P_{p,0}^{\mathbb{K}}(\underline{a}' | \underline{b}')$, avec les compositions $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a}'$ et $\underline{b}'$ vérifiant ces conditions, sont conjugués sous l'action de $\mathrm{O}(E)$ si et seulement si $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{a}', \underline{b}')$ ou $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}', \underline{a}')$.

Supposons maintenant que $n = 2p$ ou $p = q$. Soient $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ deux compositions de l'entier p telles que $a_m > 1$ et $b_t > 1$. On considère les drapeaux croisés de sous-espaces totalement isotropes

$$\mathcal{V} = \{V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_m\} \text{ et } \mathcal{W} = \{W_1 \subsetneq \dots \subsetneq W_t\}$$

tels que, pour $1 \leq i \leq m$, V_i soit engendré par $e_1, \dots, e_{l_i}$ et, pour $1 \leq i \leq t-1$, W_i soit engendré par $f_{s_i}, \dots, f_1$ et W_t par $e_p, f_{p-1}, \dots, f_1$. On désigne alors par $P_c^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \underline{b})$ le sous-groupe biparabolique de $\mathrm{SO}(E)$ stabilisant les drapeaux $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$, et par $\mathfrak{p}_c^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \underline{b})$ son algèbre de Lie.

Remarque 4.2. (i) Si dans ce qui précède la condition $a_m > 1$ n'est pas vérifiée, le sous-groupe biparabolique stabilisant les drapeaux $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ stabilise également deux drapeaux opposés, savoir $\mathcal{W}$ et le drapeau $\mathcal{V}'$ obtenu à partir de $\mathcal{V}$ en y remplaçant le sous-espace V_m par $V'_m = \langle e_1, \dots, e_{p-1}, f_p \rangle$. On a un résultat similaire si la condition $b_t > 1$ n'est pas satisfaite.

(ii) On vérifie facilement que tout sous-groupe biparabolique de $\mathrm{SO}(E)$

stabilisant une paire de drapeaux croisés de sous-espaces totalement isotropes est conjugué sous l'action de $O(E)$ à un $P_c^{\mathbb{K}}(\underline{a} \mid \underline{b})$. De plus, deux tels sous-groupes $P_c^{\mathbb{K}}(\underline{a} \mid \underline{b})$ et $P_c^{\mathbb{K}}(\underline{a}' \mid \underline{b}')$ sont conjugués sous l'action de $O(E)$ si et seulement si $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{a}', \underline{b}')$ ou $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}', \underline{a}')$.

4.2. Graphes de méandres symétriques non croisés. Comme dans [2], numéros 7.4 et 7.5 dont on reprend les notations, étant donnés $p, e \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, au couple $(\underline{a}, \underline{b})$ où $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont des compositions des entiers naturels $l, s \leq p$, on associe le graphe de méandres $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$, symétrique c'est à dire invariant par la bijection σ de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ telle que $\sigma(i) = n - i + 1$. Ce graphe est construit de la manière suivante :

Tout d'abord, au dessus de la ligne horizontale, on fabrique $\lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor$ arcs reliant le sommet 1 avec a_1 , 2 avec $a_1 - 1$, etc. Puis, appliquant la symétrie centrale σ à $[1, n]$, on obtient $\lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor$ arcs reliant le sommet n avec le sommet $n - a_1 + 1$, $n - 1$ avec $n - a_1 + 2$, etc. Pour chaque $2 \leq i \leq m$, on répète le procédé, fabriquant $\lfloor \frac{a_i}{2} \rfloor$ arcs reliant le sommet $a_1 + \dots + a_{i-1} + 1$ avec $a_1 + \dots + a_i$, $a_1 + \dots + a_{i-1} + 2$ avec $a_1 + \dots + a_i - 1$, etc. De même, appliquant la symétrie centrale σ à $[1, n]$, on obtient $\lfloor \frac{a_i}{2} \rfloor$ arcs qui relient le sommet $n - (a_1 + \dots + a_{i-1})$ avec $n - (a_1 + \dots + a_i) + 1$, $n - (a_1 + \dots + a_{i-1} + 1)$ avec $n - (a_1 + \dots + a_i) + 2$, etc. Enfin, on fabrique $\lfloor \frac{n+1-2l}{2} \rfloor$ arcs reliant le sommet $l + 1$ avec $n - l$, $l + 2$ avec $n - l - 1$, etc.

De la même façon la composition $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_t)$ détermine les arcs de $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ situés au dessous de la ligne horizontale.

En particulier, le graphe $\Gamma_{1,0}(1 \mid 1)$ est constitué de deux sommets.

Les composantes connexes de $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ sont des cycles ou des segments, éventuellement réduits à un point. Si X est un cycle ou un segment et Y est un cycle de sommets respectifs $x_r < \dots < x_1$ et $y_s < \dots < y_1$, on dit que X est à l'intérieur de Y s'il existe i tel que $y_{2i} < x_1 < y_{2i-1}$. Alors, la dimension d'un cycle est égale à 2 fois le nombre de cycles situés à l'intérieur + le nombre de segments situés à l'intérieur + 2. On convient qu'un segment est un cycle de dimension 1.

On appelle cycle maximal, un cycle qui n'est situé à l'intérieur d'aucun autre cycle. Si X est un cycle maximal, il en est de même de $\sigma(X)$ et ces deux cycles ont même dimension. On voit alors que l'ensemble des cycles maximaux du graphe $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ est constitué de paires de cycles maximaux symétriques disjoints, de cycles maximaux symétriques ayant strictement plus de deux sommets s'il ne s'agit pas de segments et strictement plus d'un sommet sinon et, éventuellement, d'un unique cycle symétrique, appelé cycle central maximal, ayant un ou deux sommets et n'étant pas un segment dans ce cas. Pour tout ceci, voir [2], numéro 6.2.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des cycles symétriques maximaux de $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$, $\mathcal{P}$ celui des paires de cycles maximaux disjoints et symétriques et on désigne par Z le cycle central maximal : s'il n'existe pas en tant que tel, on convient que $Z = \emptyset$.

Si X est un cycle maximal symétrique, on appelle distance de X au centre du graphe de méandres le nombre de sommets de $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ situés entre ce centre et l'un des deux sommets de X qui en sont les plus proches. On numérote les éléments de $\mathcal{S} = \{X_1, \dots, X_v\}$ dans l'ordre inverse de leur distance au centre du graphe de méandres. On désigne par d_i la dimension du cycle X_i , $1 \leq i \leq v$ et

par $\underline{d}$ ou $\underline{d}(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b}))$ si on tient à préciser, la composition $(d_1, \dots, d_v)$. On pose $u = u(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})) = d_1 + \dots + d_v$ et $\delta = \delta(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})) = p - \max\{l, s\}$. On remarque que le cycle central maximal est de dimension $2\delta + e$.

Les notions introduites ci-dessus sont illustrées dans les exemples 4.4 et 4.6.

Soit Σ l'ensemble des graphes de méandres symétriques $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ avec $p, e \in \mathbb{N}$ et $\underline{a}, \underline{b}$ des compositions des entiers naturels $l, s \leq p$. On définit la transformation $\rho : \Sigma \rightarrow \Sigma$ comme suit : soit $p, e \in \mathbb{N}$ $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$, $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ deux compositions de $l, s \leq p$

(a) on suppose qu'il existe $1 \leq i_0 \leq m - 1$ pour lequel $a_1 + \dots + a_{i_0} = b_1 + \dots + b_{j_0} = k$, pour un certain $1 \leq j_0 \leq t - 1$. On prend pour i_0 le plus grand entier vérifiant cette condition et on pose $\rho(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_{p-k,e}(\underline{a}' \mid \underline{b}')$ avec $\underline{a}' = (a_{i_0+1}, \dots, a_m)$ et $\underline{b}' = (b_{j_0+1}, \dots, b_t)$

(b) si l'on n'est pas dans le cas précédent et si $a_1 > b_1$ ou $\underline{a} = \emptyset$, on pose $\rho(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_{p,e}(\underline{b} \mid \underline{a})$

(c) si l'on n'est dans aucun des cas précédents et si $2a_1 \leq b_1$, on pose $\rho(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_{p-a_1,e}(\underline{a}' \mid \underline{b}')$ avec $\underline{a}' = (a_2, \dots, a_m)$ et $\underline{b}' = (b_1 - 2a_1, a_1, b_2, \dots, b_t)$, si $2a_1 < b_1$, ou $\underline{b}' = (a_1, b_2, \dots, b_t)$, si $2a_1 = b_1$

(d) si l'on n'est dans aucun des cas précédents de sorte que $a_1 < b_1 < 2a_1$, on pose $\rho(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_{p-b_1+a_1,e}(\underline{a}' \mid \underline{b}')$ avec $\underline{a}' = (2a_1 - b_1, a_2, \dots, a_m)$ et $\underline{b}' = (a_1, b_2, \dots, b_t)$

(e) si $\underline{b} = \emptyset$, on pose $\rho(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \emptyset)) = \Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \emptyset)$.

Lemme 4.1. *On garde les notations ci-dessus. (i) Dans le cas (a), $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ est réunion disjointe de $\Gamma_{k,0}(a_1, \dots, a_{i_0} \mid b_1, \dots, b_{j_0})$ et de $\rho(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b}))$. De plus $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ et $\rho(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b}))$ ont les mêmes cycles maximaux symétriques et le même cycle central maximal.*

(ii) *Dans le cas (b), la symétrie par rapport à la droite passant par les sommets de $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ établit une bijection de l'ensemble des cycles maximaux de $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ sur celui de $\rho(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b}))$. Cette bijection conserve les paires de cycles maximaux symétriques, les cycles maximaux symétriques ainsi que leur distance au centre du graphe et laisse invariant le cycle central maximal, lequel est commun aux deux graphes. La bijection conserve également la dimension des cycles maximaux.*

(iii) *Dans les cas (c) et (d), il existe une bijection canonique de l'ensemble des cycles maximaux de $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ sur celui de $\rho(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b}))$ qui conserve les paires de cycles symétriques maximaux disjoints, les cycles maximaux symétriques et leur distance au centre du graphe et qui laisse invariant le cycle central maximal, lequel est commun aux deux graphes. La bijection conserve également la dimension des cycles maximaux.*

Dans tous les cas, on a $\underline{d}(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})) = \underline{d}(\rho(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})))$ et $\delta(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})) = \delta(\rho(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})))$. Enfin, il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\rho^k(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_{u+\delta,e}(\underline{d} \mid \emptyset)$.

Preuve. À l'exception de celles concernant la distance d'un cycle maximal symétrique au centre du graphe, la composition $\underline{d}$, le nombre δ et l'existence de l'entier k , qui sont immédiates, les assertions du lemme sont une reformulation de celles de [2], lemme 7.2. ■

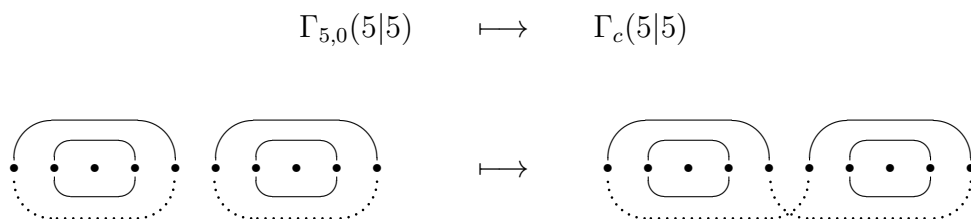
4.3. Graphes de méandres croisés. Dans ce numéro, on suppose que $n = 2p$ ou $p = q$. On se donne deux compositions $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ de p telles que $a_m > 1$ et $b_t > 1$. Suivant [6], auquel nous empruntons l'essentiel du contenu de ce numéro, nous associons à ces données un graphe de méandres croisé $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ comme suit. On construit tout d'abord le graphe $\Gamma_{p,0}(\underline{a} \mid \underline{b})$ défini au numéro précédent ; le graphe $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ est obtenu en faisant subir à ce dernier l'opération suivante :

- si $a_m < b_t$, on échange les extrémités des deux arcs situés au dessus de la ligne horizontale aboutissant aux sommets p et $p+1$: plus précisément l'arc joignant le sommet $p - a_m + 1$ au sommet p , joint maintenant le sommet $p - a_m + 1$ au sommet $p+1$ et l'arc joignant le sommet $p + a_m$ au sommet $p+1$ joint maintenant le sommet $p + a_m$ au sommet p . Ces deux arcs se croisent donc, d'où le terme de graphe de méandres croisé.
- si $a_m > b_t$, on opère de même mais pour les deux arcs situés au-dessous de la ligne horizontale aboutissant aux sommets p et $p+1$.
- si $a_m = b_t$, on opère de même soit au dessus, soit au dessous de la ligne horizontale. Les deux graphes que l'on peut ainsi obtenir ont clairement la même topologie.

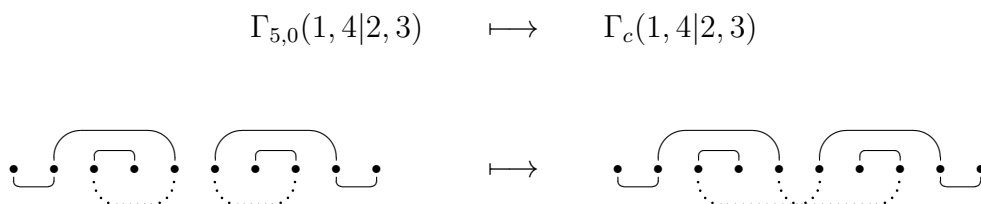
Remarque 4.3. Dans la construction précédente, lorsque $a_m \neq b_t$, on aurait pu échanger les extrémités des deux arcs aboutissant aux sommets p et $p+1$, mais situés de l'autre côté de celui choisi. Le passage de l'un à l'autre de ces deux graphes se faisant en échangeant les sommets p et $p+1$, on obtient alors un graphe ayant la même topologie, mais que l'on dit croisé du mauvais côté. A contrario, nous dirons que le graphe issu de la construction précédente est croisé du bon côté.

Exemples 4.1. Nous illustrons le passage d'un graphe symétrique non croisé à un graphe croisé dans deux cas particuliers. Les arcs transformés ont été dessinés en pointillés.

- 1) On prend $\underline{a} = (5)$ et $\underline{b} = (5)$.



- 2) On prend $\underline{a} = (1, 4)$, $\underline{b} = (2, 2)$.



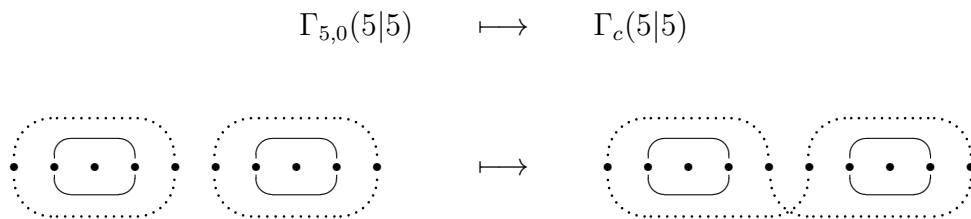
Le graphe $\Gamma_{p,0}(\underline{a} \mid \underline{b})$ ne possède que des paires de cycles maximaux symétriques. Il admet une unique telle paire $(X, \sigma(X))$ dont chacun des éléments passe par un et un seul des sommets p ou $p + 1$. On déduit de cette remarque ce qui suit.

Le graphe $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ possède exactement deux arcs se croisant l'un l'autre. Les composantes connexes contenant l'un de ceux-ci sont les seules qui traversent l'axe de symétrie vertical de $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$. De plus, soit une telle composante connexe est unique, auquel cas elle est symétrique et elle contient ces deux arcs, soit il y a deux telles composantes connexes symétriques l'une de l'autre, chacune contenant un et un seul de ces deux arcs. On notera X_c la réunion de ces composantes connexes. Dans le premier cas, X_c est une composante connexe et un cycle que nous qualifions d'étrange. Dans le second, X_c est la réunion de deux segments également qualifiés d'étranges. Il est clair que l'opération transformant le graphe $\Gamma_{p,0}(\underline{a} \mid \underline{b})$ en le graphe $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$, transforme la paire $(X, \sigma(X))$ en X_c et que X_c est un cycle étrange si et seulement si X , et donc $\sigma(X)$, n'est pas un segment.

Si X_c est un cycle étrange, on dira que sa dimension est égale à celle de chacun des cycles X ou $\sigma(X)$. Dans le cas contraire, on dira que la dimension de X_c est 1. On note d_c la dimension de X_c .

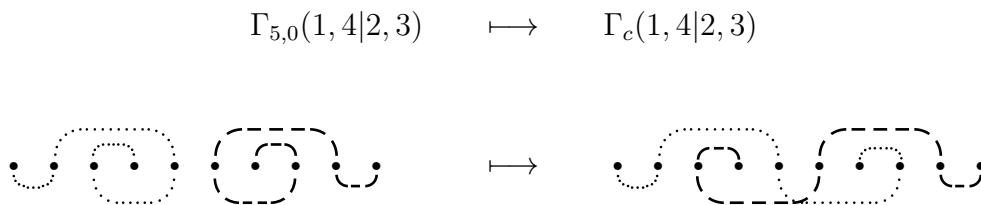
Exemples 4.2. Nous reprenons les exemples 4.1 et indiquons pour chacun d'eux la paire $(X, \sigma(X))$, les composantes connexes et la dimension de X_c .

1) $\underline{a} = (5)$ et $\underline{b} = (5)$.



Ici X , $\sigma(X)$ et X_c sont dessinés en style pointillé. La dimension de X_c est égale à 5.

2) $\underline{a} = (1, 4)$, $\underline{b} = (2, 3)$.



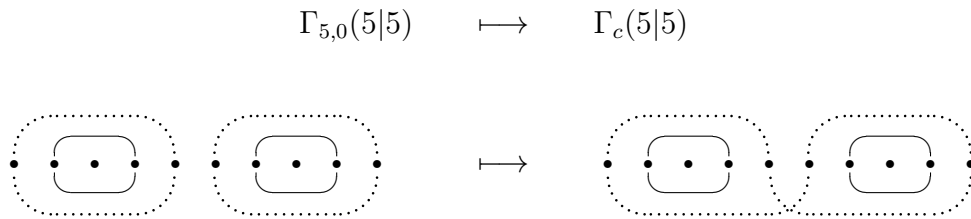
Le graphe $\Gamma_{p,0}(\underline{a} \mid \underline{b})$ ne possède que des paires de cycles maximaux symétriques. Il admet une unique telle paire $(X, \sigma(X))$ dont chacun des éléments passe par un et un seul des sommets p ou $p + 1$. On déduit de cette remarque ce qui suit.

Le graphe $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ possède exactement deux arcs se croisant l'un l'autre. Les composantes connexes contenant l'un de ceux-ci sont les seules qui traversent l'axe de symétrie vertical de $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$. De plus, soit une telle composante connexe est unique, auquel cas elle est symétrique et elle contient ces deux arcs, soit il y a deux telles composantes connexes symétriques l'une de l'autre, chacune contenant un et un seul de ces deux arcs. On notera X_c la réunion de ces composantes connexes. Dans le premier cas, X_c est une composante connexe et un cycle que nous qualifions d'étrange. Dans le second, X_c est la réunion de deux segments également qualifiés d'étranges. Il est clair que l'opération transformant le graphe $\Gamma_{p,0}(\underline{a} \mid \underline{b})$ en le graphe $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$, transforme la paire $(X, \sigma(X))$ en X_c et que X_c est un cycle étrange si et seulement si X , et donc $\sigma(X)$, n'est pas un segment.

Si X_c est un cycle étrange, on dira que sa dimension est égale à celle de chacun des cycles X ou $\sigma(X)$. Dans le cas contraire, on dira que la dimension de X_c est 1. On note d_c la dimension de X_c .

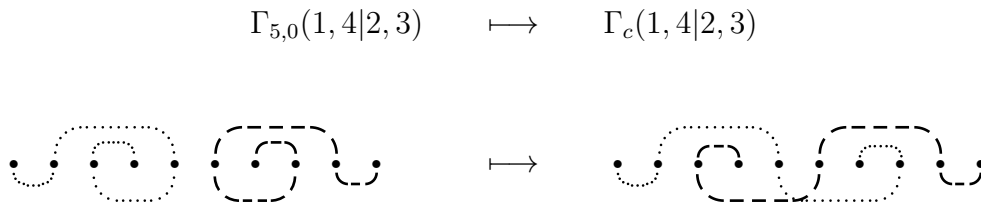
Exemples 4.3. Nous reprenons les exemples 4.1 et indiquons pour chacun d'eux la paire $(X, \sigma(X))$, les composantes connexes et la dimension de X_c .

1) $\underline{a} = (5)$ et $\underline{b} = (5)$.



Ici X , $\sigma(X)$ et X_c sont dessinées en style pointillé. La dimension de X_c est égale à 5.

2) $\underline{a} = (1, 4)$, $\underline{b} = (2, 3)$.



Ici ont été dessinés dans le même style, pointillé ou par une ligne brisée, le segment X ou $\sigma(X)$ et son image par l'opération transformant $\Gamma_{5,0}(1,4|2,3)$ en $\Gamma_c(1,4|2,3)$. La dimension de X_c est égale à 1.

L'opération transformant le graphe $\Gamma_{p,0}(\underline{a} \mid \underline{b})$ en le graphe $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$, laisse invariants tous les cycles ou segments maximaux ne contenant pas l'un des sommets p ou $p+1$. On dira qu'un tel cycle est un cycle maximal de $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ et on appellera dimension d'un cycle maximal sa dimension comme cycle du graphe $\Gamma_{p,0}(\underline{a} \mid \underline{b})$. De

plus, outre le cycle étrange ou la paire de segments étranges, $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ ne possède que des paires de cycles maximaux symétriques disjoints. Nous noterons encore $\mathcal{P}$ l'ensemble de ces paires.

On note Σ_c l'ensemble des graphes de méandres croisés $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ où $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ sont deux compositions du même entier telles que $a_m > 1$ et $b_t > 1$. On prolonge la transformation ρ en une application de $\Sigma \cup \Sigma_c$ dans lui-même comme suit : soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ deux compositions du même entier telles que $a_m > 1$ et $b_t > 1$

(a) on suppose qu'il existe $1 \leq i_0 \leq m-1$ pour lequel $a_1 + \dots + a_{i_0} = b_1 + \dots + b_{j_0}$, pour un certain $1 \leq j_0 \leq t-1$. On prend pour i_0 le plus grand entier vérifiant cette condition et on pose $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_c(\underline{a}' \mid \underline{b}')$ avec $\underline{a}' = (a_{i_0+1}, \dots, a_m)$ et $\underline{b}' = (b_{j_0+1}, \dots, b_t)$

(b) si l'on n'est pas dans le cas précédent et si $a_1 > b_1$, on pose $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_c(\underline{b} \mid \underline{a})$

(c) si l'on n'est dans aucun des cas précédents et si $2a_1 \leq b_1$ et $t > 1$ ou $a_1 > 1$, on pose $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_c(\underline{a}' \mid \underline{b}')$ avec $\underline{a}' = (a_2, \dots, a_m)$ et $\underline{b}' = (b_1 - 2a_1, a_1, b_2, \dots, b_t)$, si $2a_1 < b_1$, ou $\underline{b}' = (a_1, b_2, \dots, b_t)$, si $2a_1 = b_1$

(d) si l'on n'est dans aucun des cas précédents et si $a_1 < b_1 < 2a_1$ et $t > 1$ ou $a_1 > 1$, on pose $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_c(\underline{a}' \mid \underline{b}')$ avec $\underline{a}' = (2a_1 - b_1, a_2, \dots, a_m)$ et $\underline{b}' = (a_1, b_2, \dots, b_t)$

(e) si l'on n'est dans aucun des cas précédents et si $t = 1$ et $a_1 = 1$, alors $p > 2$ et on pose $p = b_1$ et $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_{p-1,0}(\underline{a}' \mid p-2, 1)$ avec $\underline{a}' = (a_2, \dots, a_m)$

(f) si l'on n'est dans aucun des cas précédents, on a $m = t = 1$ et on pose $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$.

Lemme 4.2. *On garde les notations ci-dessus. (i) Dans le cas (a), $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ est réunion disjointe de $\Gamma_{k,0}(a_1, \dots, a_{i_0} \mid b_1, \dots, b_{j_0})$ et de $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b}))$. De plus $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ et $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b}))$ ont le même cycle étrange ou la même paire de segments étranges.*

(ii) Dans le cas (b), la symétrie par rapport à la droite passant par les sommets de $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ établit une bijection de l'ensemble des paires de cycles maximaux de $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ sur celui de $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b}))$ en conservant les dimensions. Elle transforme le cycle étrange ou la paire de segments étranges de $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ en le même objet pour $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b}))$, lequel a la même dimension.

(iii) Dans les cas (c) et (d), il existe une bijection canonique de l'ensemble des cycles maximaux de $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ sur celui de $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b}))$ qui conserve les paires de cycles symétriques maximaux disjoints ainsi que les dimensions. De plus, $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ et $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b}))$ ont tous deux un cycle étrange de même dimension ou une paire de segments étranges.

Enfin, il existe un entier $k \geq 0$ tels que $\rho^k(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_c(d_c \mid d_c)$, si $d_c > 1$, ou $\rho^k(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_{1,0}(1 \mid 1)$, si $d_c = 1$.

Preuve. Les assertions (i) et (ii) sont immédiates. Dans les cas (c) et (d) et si $t > 1$, $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b}))$ est le résultat de la réduction de $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ décrite dans [2], démonstration du lemme 7.2 (voir également [6], pages 16 et 17) laquelle ne change pas la topologie du graphe : l'assertion (iii) est claire dans ce cas.

Si $t = 1$ et $a_m \leq a_1$, cette même réduction transforme encore $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$ en $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b}))$. Par contre si $a_m > a_1$ le graphe obtenu est croisé du mauvais côté et pour obtenir $\rho(\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b}))$, il suffit d'échanger dans ce dernier les sommets p et $p + 1$. Ceci achève la démonstration de l'assertion (iii).

Soit $p \geq 2$ et $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ deux compositions de p telles que $a_m = 1$ ou $b_t = 1$. On vérifie facilement que $\rho(\Gamma_{p,0}(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_{p',0}(\underline{a}' \mid \underline{b}')$ avec $p' < p$, $\underline{a}' = (a'_1, \dots, a'_{m'})$ et $\underline{b}' = (b'_1, \dots, b'_{t'})$ telles que $a'_{m'} = 1$ ou $b'_{t'} = 1$. On en déduit qu'il existe un entier $k > 0$ tel que $\rho^k(\Gamma_{p,0}(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_{1,0}(1 \mid 1)$.

La dernière assertion du lemme est alors immédiate. ■

4.4. Quasi-réductivité et sous-groupes réductifs canoniques des sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{SO}(E)$ stabilisant une paire de drapeaux opposés. Soit donc $l, s \leq p$ deux entiers naturels, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$, $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ deux compositions de respectivement l et s et $\underline{d} = \underline{d}(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})) = (d_1, \dots, d_v)$. On définit la composition $\underline{d}'$ et le nombre v' en décidant que $\underline{d}' = (d_1, \dots, d_{v-1})$ et $v' = v - 1$ si $e = \delta(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})) = 0$ et u est impair, et $\underline{d}' = \underline{d}$ et $v' = v$ sinon.

Théorème 4.1. *Avec les notations ci dessus, l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a} \mid \underline{b})$ est quasi-réductive si et seulement si la composition $\underline{d}'$ vérifie la condition (*).*

Preuve. Les arguments utilisés dans [2], démonstration du théorème 7.1, montrent que $\mathfrak{p}_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a} \mid \underline{b})$ est quasi-réductive si et seulement s'il en est de même de $\mathfrak{p}_{p',e}^{\mathbb{K}}(\underline{a}' \mid \underline{b}')$ où $\rho(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_{p',e}(\underline{a}' \mid \underline{b}')$. D'après le lemme 4.1, il existe un entier k tel que $\rho^k(\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})) = \Gamma_{u+\delta,e}(\underline{d} \mid \emptyset)$. Notre résultat est alors conséquence du théorème 2.1. ■

Dans la suite, on suppose que la composition $\underline{d}'$ associé à $\underline{d}$ vérifie la condition (*).

Soit $\mathcal{J}' = \{1 \leq i \leq v' \mid d_i \text{ est impair}\}$ et $\mathcal{P}' = \{1 \leq i \leq v' \mid d_i \text{ est pair}\}$. Comme $\underline{d}'$ vérifie la condition (*), $\mathcal{J}'$ a au plus une composante connexe de cardinal impair qui, si elle existe, contient v' . Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des composantes connexes de cardinal pair de $\mathcal{J}'$ et I_0 la composante connexe de cardinal impair de $\mathcal{J}'$: si cette dernière n'existe pas, on convient que $I_0 = \emptyset$.

Soit F le sous-espace de E engendré par les vecteurs $e_{p-\delta+1}, \dots, e_p, g_1, \dots, g_e, f_p, \dots, f_{p-\delta+1}$. Alors la restriction de B à F est non dégénérée et comme précédemment, on identifie $\mathrm{SO}(F)$ au sous-groupe de $\mathrm{SO}(E)$ constitué des éléments agissant trivialement dans $F^\perp$. De même, si $\nu \in F$ est un vecteur non isotrope, on identifie $\mathrm{O}(F \cap \nu^\perp)$ au sous-groupe de $\mathrm{SO}(F)$ constitué des éléments dont ν est un vecteur propre. On remarquera que F et le cycle central maximal Z ont même dimension.

Soit $X \in \mathcal{S} \cup \mathcal{P}$ un cycle maximal symétrique ou une paire de cycles maximaux symétriques de $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ et soit d_X la dimension de X ou de chacune de ses composantes. Alors, il existe des entiers $1 \leq x_u < \dots < x_1 \leq p$ tels que les sommets de X soient $x_u \leq x_u + d_X - 1 < \dots < x_1 \leq x_1 + d_X - 1 < \sigma(x_1) - d_X + 1 \leq \sigma(x_1) < \dots < \sigma(x_u) - d_X + 1 \leq \sigma(x_u)$ (voir [2], numéro 7.5).

On pose $E_X = \bigoplus_{j=0}^{u-1} E_X^j$ où E_X^j est le sous-espace de E engendré par $e_{x_u-j}, \dots, e_{x_u-j+d_X-1}, f_{\sigma(x_u-j)-d_X+1}, \dots, f_{\sigma(x_u-j)}$. Alors, la restriction de B à cha-

cun des E_X^j est non dégénérée et la somme directe $E_X = \bigoplus_{j=0}^{u-1} E_X^j$ est orthogonale. On a donc $E = E_X \oplus E_X^\perp$. On note η_X le plongement de groupes algébriques de $\mathrm{GL}(d_X)$ dans $\mathrm{SO}(E)$ tel que si $g \in \mathrm{GL}(d_X)$, $\eta_X(g)$ agisse trivialement dans $E_X^\perp$ et laisse invariant chacun des espaces E_X^j , la matrice de $\eta_X(g)|_{E_X^j}$ dans la base $(e_{x_{u-j}}, \dots, e_{x_{u-j}+d_X-1}, f_{\sigma(x_{u-j})-d_X+1}, \dots, f_{\sigma(x_{u-j})})$ s'écrivant par blocs

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \gamma_{d_X} {}^t g^{-1} \gamma_{d_X} \end{pmatrix}.$$

Si X est une paire de cycles maximaux symétriques, on désigne par R_X le sous-groupe de $\mathrm{SO}(E)$, image de $\mathrm{GL}(d_X)$ par le plongement η_X . Soit alors $R_{\mathcal{P}} = \prod_{X \in \mathcal{P}} R_X$, qui est un produit direct de sous-groupes de $\mathrm{SO}(E)$.

Si $1 \leq i \leq v$, on pose $\eta_i = \eta_{X_i}$.

Soit $i \in \mathcal{P}'$. On désigne par R_i le sous-groupe de $\mathrm{SO}(E)$, image de $\mathrm{Sp}(\frac{d_i}{2})$ par le plongement η_i .

Dans la suite on convient que $d_{v+1} = 0$, que $\mathrm{GL}(0)$ est le groupe trivial et que η_{v+1} est l'unique plongement de $\mathrm{GL}(0)$ dans $\mathrm{SO}(E)$. On rappelle les groupes $\tilde{R}_{a,b}$, où a, b sont des entiers naturels avec a impair, et leur caractère ϵ introduits dans le numéro 2.

Soit $1 \leq i \leq v$ tel que d_i soit impair. Alors l'application $\tilde{\eta}_i : (g, h) \mapsto \eta_i(g)\eta_{i+1}(h)$ est un plongement de groupes algébriques de $\mathrm{GL}(d_i) \times \mathrm{GL}(d_{i+1})$ dans $\mathrm{SO}(E)$ et on désigne par R_i le sous-groupe de $\mathrm{SO}(E)$ image par $\tilde{\eta}_i$ du sous-groupe $\tilde{R}_{d_i, d_{i+1}}$ de $\mathrm{GL}(d_i) \times \mathrm{GL}(d_{i+1})$. Comme au numéro 2, on définit le caractère ϵ de R_i en décidant que, pour $g \in \tilde{R}_{d_i, d_{i+1}}$, $\epsilon(\tilde{\eta}_i(g)) = \epsilon(g)$.

Soit $I \subset \mathcal{P}'$ une partie connexe non vide de cardinal pair $2u$ de sorte que $I = \{i_0, i_0+1, \dots, i_0+2u-1\}$. Les sous-groupes R_{i_0+2j} , $0 \leq j \leq u-1$, commutent deux à deux et on pose $R_I = \prod_{j=0}^{u-1} R_{i_0+2j}$, qui est en fait un produit direct.

Si I_0 est vide et $v' = v$, on pose $R_{I_0} = \mathrm{SO}(F)$.

Si I_0 est vide et $v' = v-1$, d_v est impair et $F = \{0\}$. On définit R_{I_0} comme l'image du sous-groupe $\tilde{R}_{1, d_v-1}$ de $\mathrm{GL}(d_v)$ par le plongement η_v .

Supposons I_0 non vide, de sorte que $v' \in I_0$. Nous distinguons deux cas, suivant que $v' = v$ ou $v' = v-1$.

Supposons que $v' = v$. Dans ce cas, d_v est impair et F est non nul. Si $\nu \in F$ est un vecteur non isotrope, on définit le groupe $R_{\{\nu\}}^\nu$ comme étant le sous-groupe du produit $R_v \mathrm{O}(F \cap \nu^\perp)$ constitué des éléments de la forme gh avec $g \in R_v$ et $h \in \mathrm{O}(F \cap \nu^\perp)$ tels que $\det h = \epsilon(g)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\delta = 0$, on choisit un élément non isotrope $\nu \in F$ et on pose $R_{\{\nu\}} = R_{\{\nu\}}^\nu$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on choisit deux éléments non isotropes ν^+ et ν^- de F tels que $B(\nu^+, \nu^+) > 0$ et $B(\nu^-, \nu^-) < 0$, et on pose $R_{\{\nu\}}^\pm = R_{\{\nu\}}^{\nu^\pm}$.

Finalement on pose $R_{I_0} = R_{I_0 \setminus \{\nu\}} \times R_{\{\nu\}}$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\delta = 0$, et $R_{I_0}^\pm = R_{I_0 \setminus \{\nu\}} \times R_{\{\nu\}}^\pm$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\delta > 0$.

Supposons que $v' = v-1$. Dans ce cas $e = \delta = 0$, $n = 2p$, $F = \{0\}$, u est impair, d_{v-1} est impair et d_v est pair. On pose alors $R_{I_0} = R_{I_0 \setminus \{v-1\}} \times R_{v-1}$.

Enfin, si $I_0 = \emptyset$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\delta = 0$, on pose $R = R_{\mathcal{P}} \times \prod_{i \in \mathcal{P}'} R_i \times \prod_{J \in \mathcal{C}} R_J \times R_{I_0}$. Si I_0 est non vide, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on pose $R^\pm = R_{\mathcal{P}} \times \prod_{i \in \mathcal{P}'} R_i \times \prod_{J \in \mathcal{C}} R_J \times R_{I_0}^\pm$. Il convient de remarquer que tous les

sous-groupes apparaissant dans les produits considérés commutent deux à deux et qu'en fait ces produits sont des produits directs.

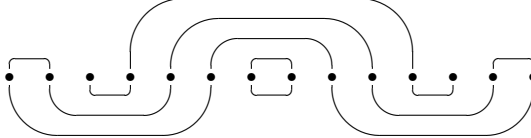
Théorème 4.2. *On suppose que la composition $\underline{d}'$ associée à $\underline{d}$ vérifie la condition $(*)$ de sorte que l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \underline{b})$ est quasi-réductive.*

(i) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les sous-groupes réductifs canoniques de $P_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \underline{b})$ sont tous conjugués à R .*

(ii) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\delta = 0$ ou $I_0 = \emptyset$, les sous-groupes réductifs canoniques de $P_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \underline{b})$ sont tous conjugués à R .*

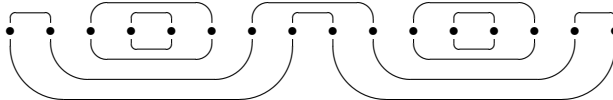
(iii) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $I_0 \neq \emptyset$ et $\delta > 0$, il y a deux classes de conjugaison de sous-groupes réductifs canoniques de $P_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \underline{b})$ dont un système de représentants est $\{R^+, R^-\}$.*

Preuve. Il suit du théorème 2.2 que le résultat est vrai pour les sous-groupes paraboliques de $\mathrm{SO}(E)$. Les arguments développés dans la deuxième partie de [2], démonstration du théorème 7.1, s'appliquent également ici et permettent de conclure par récurrence sur n . ■

Exemples 4.4. 1) $\Gamma_{7,0}(2, 1|6) =$ 

Ce graphe correspond au sous-groupe biparabolique $P_{7,0}^{\mathbb{K}}(2, 1 | 6)$. Il contient un cycle maximal symétrique X_1 de dimension 1, un cycle maximal symétrique X_2 de dimension 2 et un cycle central maximal de dimension 2.

Dans ce cas $v = v' = 2$, $\delta = 1$, $\mathcal{S}' = \{1\}$, $\mathcal{P}' = \{2\}$, alors $\mathfrak{p}_{7,0}^{\mathbb{K}}(2, 1 | 6)$ n'est pas quasi-réductive.

2) $\Gamma_{8,0}(2, 4|8) =$ 

Ce graphe correspond au sous-groupe biparabolique $P_{8,0}^{\mathbb{K}}(2, 4|8)$. Il contient un cycle maximal symétrique X_1 de dimension $d_1 = 2$ et une paire de cycles maximaux symétriques disjoints X de dimension 4, $n = 16$, $\delta = 0$, $u = 2$, $v = v' = 1$, $\mathcal{P}' = \{1\}$, $\mathcal{S}' = \emptyset$, $I_0 = \emptyset$ et $F = \{0\}$.

Donc $\mathfrak{p}_{8,0}^{\mathbb{K}}(2, 4 | 8)$ est fortement quasi-réductive et les sous-groupes réductifs canoniques de $P_{8,0}^{\mathbb{K}}(2, 4 | 8)$ sont conjugués à :

$$R = R_{\mathcal{P}} \times R_1$$

où $R_{\mathcal{P}}$ est le sous-groupe de $P_{8,0}^{\mathbb{K}}(2, 4|8)$ image de $\mathrm{GL}(4, \mathbb{K})$ par le plongement η dans $\mathrm{SO}(E)$, tel que pour $g \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{K})$ $\eta(g)$ stabilise le sous-espace $E_X = \langle e_3, e_4, e_5, e_6, f_6, f_5, f_4, f_3 \rangle$, la matrice de $\eta(g)|_{E_X}$ dans la base $e_3, e_4, e_5, e_6, f_6, f_5, f_4, f_3$

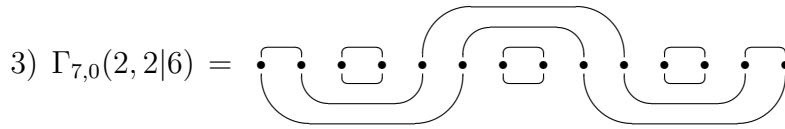
étant

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \gamma_4 {}^t g^{-1} \gamma_4 \end{pmatrix},$$

et agit trivialement dans $E_X^\perp$, tandis que R_1 est le sous-groupe de $P_{8,0}^{\mathbb{K}}(2, 4|8)$ image de $\mathrm{Sp}(1, \mathbb{K})$ par le plongement η_1 dans $\mathrm{SO}(E)$, tel que pour $g \in \mathrm{Sp}(1, \mathbb{K})$, $\eta_1(g)$ stabilise le sous-espace $E_1 = \langle e_1, e_2, e_7, e_8, f_8, f_7, f_2, f_1 \rangle$, la matrice de $\eta_1(g)|_{E_1}$ dans la base $e_1, e_2, e_7, e_8, f_8, f_7, f_2, f_1$ étant

$$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 {}^t g^{-1} \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 {}^t g^{-1} \gamma_2 \end{pmatrix},$$

et agit trivialement dans $E_1^\perp$.



Ce graphe correspond au sous-groupe biparabolique $P_{7,0}^{\mathbb{K}}(2, 2|6)$. Il contient un cycle maximal symétrique X_1 de dimension $d_1 = 2$, une paire de cycles maximaux symétriques disjoints X de dimension 2 et un cycle central maximal de dimension 2. On a $n = 14$, $\delta = 1$, $u = 2$, $v = v' = 1$, $\mathcal{P}' = \{1\}$, $\mathcal{I}' = \emptyset$, $I_0 = \emptyset$ et $F = \langle e_7, e_8 \rangle$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_{7,0}^{\mathbb{K}}(2, 2 | 6)$ est fortement quasi-réductive et les sous-groupes réductifs canoniques de $P_{7,0}^{\mathbb{K}}(2, 2 | 6)$ sont conjugués à

$$R = R_{\mathcal{P}} \times R_1 \times R_{I_0}$$

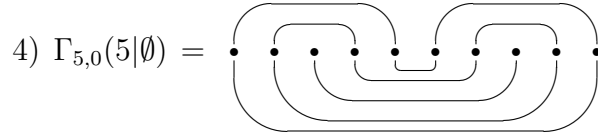
Ici, $R_{\mathcal{P}}$ est le sous-groupe de $P_{7,0}^{\mathbb{K}}(2, 2|6)$ image de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$ par le plongement η de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$ dans $\mathrm{SO}(E)$, tel que pour $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$, $\eta(g)$ stabilise le sous-espace $E_X = \langle e_3, e_4, f_4, f_3 \rangle$, la matrice de $\eta(g)|_{E_X}$ dans la base e_3, e_4, f_4, f_3 étant

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \gamma_2 {}^t g^{-1} \gamma_2 \end{pmatrix},$$

et agit trivialement dans $E_X^\perp$, R_1 est le sous-groupe de $P_{7,0}^{\mathbb{K}}(2, 2|6)$ image de $\mathrm{Sp}(1, \mathbb{K})$ par le plongement η_1 dans $\mathrm{SO}(E)$ tel que pour $g \in \mathrm{Sp}(1, \mathbb{K})$, $\eta_1(g)$ stabilise le sous-espace $E_1 = \langle e_1, e_2, e_5, e_6, f_6, f_5, f_2, f_1 \rangle$, la matrice de $\eta_1(g)|_{E_1}$ dans la base $e_1, e_2, e_5, e_6, f_6, f_5, f_2, f_1$ étant

$$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 {}^t g^{-1} \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 {}^t g^{-1} \gamma_2 \end{pmatrix},$$

et agit trivialement dans $E_1^\perp$. Enfin, $R_{I_0} = \mathrm{SO}(F)$ est isomorphe à $\mathrm{SO}(2, \mathbb{C})$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. et à $R_{I_0} \simeq \mathrm{SO}(1, 1)$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.



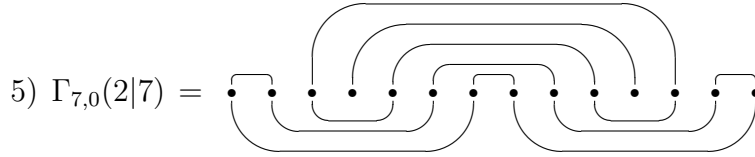
Ce graphe correspond au sous-groupe parabolique $P_{5,0}^{\mathbb{K}}(5|\emptyset)$. Il contient un cycle maximal symétrique X_1 de dimension $d_1 = 5$ et on a $n = 10$, $\delta = 0$, $u = p = 5$, $v' = v - 1 = 0$, $\mathcal{P}' = \emptyset$, $\mathcal{S}' = \emptyset$, $I_0 = \emptyset$, $F = \{0\}$.

Alors, $\mathfrak{p}_{7,0}^{\mathbb{K}}(2, 2 | 6)$ est fortement quasi-réductive et les sous-groupes réductifs canoniques de $P_{7,0}^{\mathbb{K}}(5 | \emptyset)$ sont conjugués au sous-groupe R_{I_0} image de

$$\tilde{R}_{1,4} = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}, g \in \mathrm{Sp}(1, \mathbb{K}), \epsilon = \pm 1 \right\}$$

par le plongement η tel que

$$\eta(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \gamma_5 {}^t g^{-1} \gamma_5 \end{pmatrix}, g \in \tilde{R}_{1,4}.$$



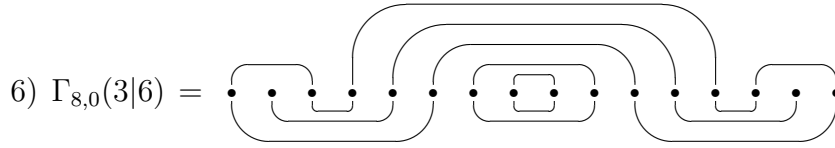
Ce graphe correspond au sous-groupe biparabolique $P_{7,0}^{\mathbb{K}}(2|7)$. Il contient les cycles maximaux symétriques X_1 de dimension $d_1 = 3$ et X_2 de dimension $d_2 = 2$. On a $n = 14$, $\delta = 0$, $u = 5$, $v' = v - 1 = 1$, $\mathcal{P}' = \emptyset$, $\mathcal{S}' = \{1\}$, $I_0 = \{1\}$ et $F = \{0\}$.

Alors, $\mathfrak{p}_{7,0}^{\mathbb{K}}(2 | 7)$ est fortement quasi-réductive et les sous-groupes réductifs canoniques de $P_{7,0}^{\mathbb{K}}(2|7)$ sont conjugués à R_{I_0} image de

$$\tilde{R}_{3,2} = \left\{ g(a, \epsilon) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}, a \in \mathrm{Sp}(1, \mathbb{K}), \epsilon = \pm 1 \right\}$$

par le plongement η tel que

$$\eta(g(a, \epsilon)) = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g(a, \epsilon) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_5 {}^t g(a, \epsilon)^{-1} \gamma_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}.$$



Ce graphe correspond au sous-groupe biparabolique $P_{8,0}^{\mathbb{K}}(3|6)$. Il contient un cycle maximal symétrique X_1 de dimension $d_1 = 3$ et un cycle maximal central de dimension 4. On a $n = 16$, $\delta = 2$, $u = 3$, $v' = v = 1$, $\mathcal{P}' = \emptyset$, $\mathcal{J}' = \{1\}$, $I_0 = \{1\}$ et $F = \langle e_7, e_8, f_8, f_7 \rangle$.

Alors, $\mathfrak{p}_{8,0}^{\mathbb{K}}(3|6)$ est fortement quasi-réductive et les sous-groupes réductifs canoniques de $P_{8,0}^{\mathbb{K}}(3|6)$ sont conjugués à R_{I_0} (resp. $R_{I_0}^{\pm}$) si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Soit η le plongement de $\mathrm{Sp}(1, \mathbb{K}) \times \{\pm 1\}$ dans $\mathrm{SO}(E)$ tel que pour $(g, \epsilon) \in \mathrm{Sp}(1, \mathbb{K}) \times \{\pm 1\}$, $\eta(g, \epsilon)$ laisse invariant le sous-espace

$$E_1 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, f_6, f_5, f_4, f_3, f_2, f_1 \rangle,$$

la matrice de $\eta(a, \epsilon)$ dans la base $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, f_6, f_5, f_4, f_3, f_2, f_1$ étant

$$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 {}^t g^{-1} \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 {}^t g^{-1} \gamma_2 \end{pmatrix}$$

et agit trivialement dans $E_1^{\perp}$.

On rappelle que si $\nu \in F$ est un vecteur non isotrope, on identifie $\mathrm{O}(F \cap \nu^{\perp})$ au sous-groupe de $\mathrm{SO}(F)$ laissant invariant la droite engendrée par ν .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on pose $\nu = e_8 + f_8$. Alors $\mathrm{O}(F \cap \nu^{\perp})$ est isomorphe à $\mathrm{O}(3, \mathbb{C})$ et on prend

$$R_{I_0} = \{\eta(a, \epsilon)b, a \in \mathrm{Sp}(1, \mathbb{C}), b \in \mathrm{O}(F \cap \nu^{\perp}) \text{ et } \epsilon = \det b\}.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on pose $\nu^{\pm} = e_8 \pm f_8$. Alors $\mathrm{O}(F \cap \nu^{\pm})^{\perp}$ est isomorphe à $\mathrm{O}(1, 2)$ et on prend

$$R_{I_0}^{\pm} = \{\eta(a, \epsilon)b, a \in \mathrm{Sp}(1, \mathbb{C}), b \in \mathrm{O}(F \cap (\nu^{\pm})^{\perp}) \text{ et } \epsilon = \det b\}.$$

4.5. Quasi-réductivité et sous-groupes réductifs canoniques des sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{SO}(E)$ stabilisant une paire de drapeaux croisés. Soit donc $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ deux compositions du même entier $p \geq 2$ telles que $a_m > 1$ et $b_t > 1$.

Soit $X \in \mathcal{P}$ une paire de cycles maximaux symétriques disjoints de $\Gamma_c(\underline{a} \mid \underline{b})$. C'est également une paire de cycles maximaux symétriques disjoints du graphe

symétrique $\Gamma_{p,0}(\underline{a} \mid \underline{b})$ dont la dimension commune est d_X et on a construit au numéro précédent le sous-groupe R_X de $\mathrm{SO}(E)$ isomorphe à $\mathrm{GL}(d_X)$. De même, on pose $R_{\mathcal{P}} = \prod_{X \in \mathcal{P}} R_X$.

Il existe des entiers $1 \leq x_u < \cdots < x_1 \leq p$ tels que les sommets de X_c soient $x_u < \cdots < x_2 < x_1 = p < \sigma(x_1) = p+1 < \sigma(x_2) < \cdots < \sigma(x_u)$, si $d_c = 1$, et $x_u < x_u + d_c - 1 < \cdots < x_2 < x_2 + d_c - 1 < x_1 < \sigma(x_1) - d_c = p < x_1 + d_c = p+1 < \sigma(x_1) < \sigma(x_2) - d_c + 1 < \sigma(x_2) < \cdots < \sigma(x_u) - d_c + 1 < \sigma(x_u)$, si $d_c > 1$.

Si $d_c = 1$, pour $t \in \mathrm{GL}(1)$, on note $\eta_c(t) \in \mathrm{SO}(E)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux d'indice x_j , $1 \leq j \leq u$, valent t , ceux d'indice $\sigma(x_j)$, $1 \leq j \leq u$, valent t^{-1} , tous les autres étant égaux à 1. Alors η_c est un plongement de $\mathrm{GL}(1)$ dans $\mathrm{SO}(E)$.

Supposons $d_c \geq 2$. On pose $E_c = \bigoplus_{j=0}^{u-1} E_c^j$ où E_c^j est le sous-espace de E engendré par $e_{x_{u-j}}, \dots, e_{x_{u-j}+d_c-1}, f_{\sigma(x_{u-j})-d_c+1}, \dots, f_{\sigma(x_{u-j})}$. On a $E = E_c \oplus E_c^\perp$. On note η_c le plongement de groupes algébriques de $\mathrm{GL}(d_c - 2) \times \{\pm 1\}$ dans $\mathrm{SO}(E)$ tel que, si $(g, \epsilon) \in \mathrm{GL}(d_c - 2) \times \{\pm 1\}$, $\eta_c(g, \epsilon)$ agisse trivialement sur $E_c^\perp$ et laisse invariant chacun des espaces E_c^j , la matrice de $\eta_c(g, \epsilon)|_{E_c^j}$ dans la base $(e_{x_{u-j}}, \dots, e_{x_{u-j}+d_c-1}, f_{\sigma(x_{u-j})-d_c+1}, \dots, f_{\sigma(x_{u-j})})$ étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \eta(g, \epsilon) & 0 \\ 0 & \gamma_{d_c} {}^t\eta(g, \epsilon)^{-1} \gamma_{d_c} \end{pmatrix}$$

où $\eta(g, \epsilon)$ est la matrice définie à partir de (g, ϵ) par la relation (1). On pose alors $R_c = \eta_c(\mathrm{GL}(1))$, si $d_c = 1$ et $R_c = \eta_c(\mathrm{GL}(d_c - 2) \times \{\pm 1\})$, si $d_c \geq 2$.

Enfin, on pose $R = R_c \times R_{\mathcal{P}}$.

Théorème 4.3. Soit $p \geq 2$ un entier, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ deux compositions de p telles que $a_m > 1$ et $b_t > 1$. Alors, l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_c^{\mathbb{K}}(\underline{a} \mid \underline{b})$ est quasi-réductive et tout sous-groupe réductif canonique de $P_c^{\mathbb{K}}(\underline{a} \mid \underline{b})$ est conjugué à R .

Preuve. Il suit du théorème 3.1 que le résultat est vrai si $m = t = 1$. D'autre part, échanger les sommets p et $p+1$ pour passer d'un graphe croisé du mauvais côté à un graphe croisé du bon côté revient à échanger les vecteurs e_p et f_p de la base canonique, c'est à dire à changer le sous-groupe biparabolique correspondant en un sous-groupe conjugué par un élément de $\mathrm{O}(E)$. Compte tenu du lemme 4.2, on voit alors que les arguments développés dans la deuxième partie de [2], démonstration du théorème 7.1, s'appliquent également ici et permettent de conclure par récurrence sur p . ■

Exemples 4.5. 1) $\Gamma_c(5 \mid 5) =$ 

Ce graphe correspond au sous-groupe biparabolique $P_c^{\mathbb{K}}(5 \mid 5)$ de $\mathrm{SO}(10)$ ou $\mathrm{SO}(5, 5)$, selon que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Il contient un cycle étrange de dimension 5 et aucune paire de cycles maximaux symétriques disjoints. Les sous-groupes réductifs canoniques de $P_c^{\mathbb{K}}(5 \mid 5)$ sont conjugués au sous-groupe R , isomorphe à $\mathrm{GL}(3)$,

constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 {}^t g^{-1} \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad g \in \mathrm{GL}(3).$$

$$2) \Gamma_c(1, 4 \mid 2, 3) = \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$$

Ce graphe correspond au sous-groupe biparabolique $P_c^{\mathbb{K}}(1, 4 \mid 2, 3)$ de $\mathrm{SO}(10)$ ou $\mathrm{SO}(5, 5)$, selon que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Il est réduit à une paire de segments étranges. Les sous-groupes réductifs canoniques de $P_c^{\mathbb{K}}(1, 4 \mid 2, 3)$ sont conjugués au sous-groupe R isomorphe à $\mathrm{GL}(1)$, constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} {}^t I_5 & 0 \\ 0 & t^{-1} I_5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{K}^\times.$$

4.6. Sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{SO}(E)$ dont l'algèbre de Lie est de Frobenius. Rappelons que l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique est dite de Frobenius si elle possède une orbite coadjointe ouverte. On déduit des théorèmes 2.2 et 4.2 le résultat suivant :

Corollaire 4.1. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a} \mid \underline{b})$ est de Frobenius si et seulement si le graphe de méandres $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ ne possède pas de paire de cycles maximaux symétriques et l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- (i) v est pair, $d_i = 1$, $1 \leq i \leq v$ et $\dim F = 1$,
- (ii) v est pair, $d_i = 1$, $1 \leq i \leq v - 1$, $d_v = 2$ et $F = \{0\}$,
- (iii) v est impair, $d_i = 1$, $1 \leq i \leq v - 1$, $d_v = 3$ et $F = \{0\}$,
- (iv) v est impair, $d_i = 1$, $1 \leq i \leq v$ et $\dim F \in \{1, 2\}$.

Preuve. Dire que l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a} \mid \underline{b})$ est de Frobenius revient à dire qu'elle est quasi-réductive et que les sous-groupes réductifs canoniques de $P_{p,e}^{\mathbb{K}}(\underline{a} \mid \underline{b})$ sont des groupes finis. Il suit du théorème 4.2 que ceci est réalisé si et seulement si la composition $\underline{d}'$ vérifie la condition $(*)$, $\mathcal{P} = \emptyset$, $\mathcal{P}' = \emptyset$ et $R = \prod_{J \in \mathcal{C}} R_J \times R_{I_0}$ est fini.

Supposons que la composition $\underline{d}'$ vérifie la condition $(*)$, $\mathcal{P} = \emptyset$ et $\mathcal{P}' = \emptyset$. On voit alors que $\mathcal{C} = \emptyset$ ou $\mathcal{C} = \{\mathcal{J}'\}$.

Cas 1 : $\mathcal{C} = \{\mathcal{J}'\}$, alors v' est pair et $I_0 = \emptyset$. On a donc $R = R_{\mathcal{J}'} \times R_{I_0}$. On voit donc que R est fini si et seulement si $d_i = 1$, $1 \leq i \leq v'$ et R_{I_0} est fini. Nous distinguons deux sous-cas :

a) $v' = v$. On a alors $R_{I_0} = \mathrm{SO}(F)$, de sorte que dans cette situation R est

fini si et seulement si $d_i = 1$, $1 \leq i \leq v$ et $\dim F = 1$, c'est à dire si la condition (i) est satisfaite.

b) $v' = v - 1$. Alors d_v est impair, $F = \{0\}$ et R_{I_0} est isomorphe à $\tilde{R}_{1,d_v-1}$. Dans cette situation, R est fini si et seulement si $d_i = 1$, $1 \leq i \leq v - 1$ et $d_v = 3$, c'est à dire si la condition (iii) est satisfaite.

Cas 2 : $\mathcal{C} = \emptyset$, alors $I_0 = \mathcal{I}'$ et v' est impair. On a donc $R = R_{I_0}$. Ici aussi, nous distinguons deux sous-cas :

a) $v' = v$. Alors d_v est impair, F est non nul et $R_{I_0} = R_{I_0 \setminus \{v\}} \times R_{\{v\}}^\nu$ avec $\nu \in F$ un vecteur non isotrope. Or le groupe $R_{\{v\}}^\nu$ contient un sous-groupe ouvert isomorphe au produit direct de $\text{SO}(F \cap \nu^\perp)$ et de $\tilde{R}_{d_v,0}$. Il est alors clair que R est fini si et seulement si $d_i = 1$, $1 \leq i \leq v$ et $\dim F \in \{1, 2\}$, c'est à dire si la condition (iv) est satisfaite.

b) $v' = v - 1$. Alors d_v est pair, $F = \{0\}$ et $R_{I_0} = R_{I_0 \setminus \{v-1\}} \times R_{\{v-1\}}^\nu$. On voit alors que R est fini si et seulement si $d_i = 1$, $1 \leq i \leq v - 1$ et $d_v = 2$, c'est à dire si la condition (ii) est satisfaite.

Comme chacune des conditions (i) à (iv) implique que $\underline{d}'$ satisfait la condition (*), le corollaire est démontré. ■

Corollaire 4.2. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_{p,e}^\mathbb{K}(\underline{a} \mid \underline{b})$ est de Frobenius si et seulement si le graphe de méandres $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ ne possède pas de paire de cycles maximaux symétriques et vérifie l'une des conditions suivantes :*

(i) *ses cycles maximaux symétriques sont en nombre pair et de dimension 1 et son cycle central maximal est un singleton ;*

(ii) *ses cycles maximaux symétriques sont en nombre pair tous de dimension 1, à l'exception de celui à distance minimale du centre du graphe qui est de dimension 2, et son cycle central maximal est vide ;*

(iii) *ses cycles maximaux symétriques sont en nombre impair tous de dimension 1, à l'exception de celui à distance minimale du centre du graphe qui est de dimension 3, et son cycle central maximal est vide ;*

(iv) *ses cycles maximaux symétriques sont en nombre impair tous de dimension 1 et son cycle central maximal est un singleton ou de dimension 2.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du corollaire 4.1 et du fait que le sous-espace F et le cycle central maximal Z ont même dimension. ■

Exemples 4.6. 1) $\Gamma_{7,1}(5|7) =$

On a $v = 2$, $d_1 = d_2 = 1$, $\dim F = 1$, $\mathfrak{p}_{7,1}^\mathbb{K}(5|7)$ est de Frobenius.

2) $\Gamma_{5,0}(2|1, 2, 2) =$

On a $v = 2$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $\dim F = 0$, $\mathfrak{p}_{5,0}^{\mathbb{K}}(2|1, 2, 2)$ est de Frobenius.

$$3) \Gamma_{5,0}(1, 1, 3|\emptyset) = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

On a $v = 3$, $d_1 = d_2 = 1$, $d_3 = 3$, $\dim F = 0$, $\mathfrak{p}_{5,0}^{\mathbb{K}}(1, 1, 3|\emptyset)$ est de Frobenius.

$$4) \Gamma_{4,1}(1|3, 1) = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

On a $v = 3$, $d_1 = d_2 = d_3 = 1$, $\dim F = 1$, $\mathfrak{p}_{4,1}^{\mathbb{K}}(1|3, 1)$ est de Frobenius.

$$5) \Gamma_{4,0}(1, 1, 1|\emptyset) = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

On a $v = 3$, $d_1 = d_2 = d_3 = 1$, $\dim F = 2$, $\mathfrak{p}_{4,0}^{\mathbb{K}}(1, 1, 1|\emptyset)$ est de Frobenius.

Corollaire 4.3. Soit $p \geq 2$ un entier, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ deux compositions de p telles que $a_m > 1$ et $b_t > 1$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_c^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \underline{b})$ est de Frobenius si et seulement si elle n'admet pas de paire de cycles maximaux symétriques et elle possède un cycle étrange de dimension 2.

Dans ce cas, $P_c^{\mathbb{K}}(\underline{a} | \underline{b})$ possède un unique sous-groupe réductif canonique, le groupe à deux éléments $\{\pm I_{2p}\}$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème 4.3. ■

Exemple 4.1. On considère le graphe croisé

$$\Gamma_c(4 | 2, 2) = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

Il correspond au sous-groupe biparabolique $P_c^{\mathbb{K}}(4 | 2, 2)$ de $\mathrm{SO}(8)$ ou $\mathrm{SO}(4, 4)$ et est constitué d'un seul cycle étrange de dimension 2. L'unique sous-groupe réductif canonique de $P_c^{\mathbb{K}}(4 | 2, 2)$ est donc $\{\pm Id_8\}$ et l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_c^{\mathbb{K}}(4 | 2, 4)$ est de Frobenius.

4.7. Sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{SO}(E)$ admettant des séries discrètes. Dans ce numéro, nous caractérisons les sous-groupes biparaboliques de $\mathrm{SO}(E)$ qui admettent des séries discrètes.

Comme plus haut, on pose $q = p + e$ et $n = p + q$.

Corollaire 4.4. *On suppose que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Le sous-groupe biparabolique $P_{p,e}^{\mathbb{R}}(\underline{a} \mid \underline{b})$ de $\mathrm{SO}(E) = \mathrm{SO}(p, q)$ admet des séries discrètes si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i) *la composition $\underline{d}'$ vérifie la condition $(*)$,*
- (ii) *son graphe de méandres ne possède pas de paires de cycles maximaux symétriques,*

ainsi que l'une des conditions ci-après :

- (iii) $\delta = 0$,
- (iv) δ et n sont pairs,
- (v) δ ou n est impair et $I_0 \neq \emptyset$,
- (vi) $v' = v - 1$.

En particulier un sous-groupe parabolique de $\mathrm{SO}(p, q)$ possède des séries discrètes si et seulement si la condition (i) ainsi que l'une des conditions (iii), (iv), (v) ou (vi) sont satisfaites.

Preuve. On sait qu'un groupe de Lie G presque algébrique, c'est à dire qui est un sous-groupe ouvert du groupe des points réels d'un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$, admet des séries discrètes, si et seulement si son algèbre de Lie est quasi-réductive et s'il possède des sous-groupes réductifs canoniques admettant eux-mêmes des séries discrètes (voir [2], corollaire 8.1).

Il suit alors du théorème 4.1 que si $P_{p,e}^{\mathbb{R}}(\underline{a} \mid \underline{b})$ admet des séries discrètes, la composition $\underline{d}'$ vérifie la condition $(*)$, ce que l'on suppose pour la suite de la démonstration.

Contrairement aux groupes linéaires, les groupes symplectiques sur $\mathbb{R}$ admettent des séries discrètes. Comme chaque paire de cycles maximaux symétriques correspond à un facteur linéaire des sous-groupes réductifs canoniques, il suit du théorème 4.2 que le sous-groupe biparabolique $P_{p,e}^{\mathbb{R}}(\underline{a} \mid \underline{b})$ admet des séries discrètes si et seulement si le graphe de méandres $\Gamma_{p,e}(\underline{a} \mid \underline{b})$ n'admet pas de paires de cycles maximaux symétriques et si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :

- (a) $I_0 = \emptyset$, $v' = v$ et $\mathrm{SO}(F)$ admet des séries discrètes,
- (b) $I_0 \neq \emptyset$, $v' = v$ et il existe un vecteur non isotrope $\nu \in F$ tel que $\mathrm{O}(F \cap \nu^\perp)$ admette des séries discrètes,
- (c) $v' = v - 1$.

Compte tenu de la construction du sous-espace F de E , il est clair que les conditions (a) et (b) sont respectivement équivalentes à

- (a') $I_0 = \emptyset$, $v' = v$ et $\mathrm{SO}(\delta, \delta + e)$ admet des séries discrètes,
- (b') $I_0 \neq \emptyset$, $v' = v$ et $\mathrm{SO}(\delta, \delta + e - 1)$ ou $\mathrm{SO}(\delta - 1, \delta + e)$, si $\delta > 0$, admet des séries discrètes.

Notre résultat en découle facilement. ■

Corollaire 4.5. *Soit $\underline{a}$ et $\underline{b}$ deux compositions du même entier $p \geq 2$. Le sous-groupe biparabolique $P_c^{\mathbb{K}}(\underline{a} \mid \underline{b})$ admet des séries discrètes si et seulement si son algèbre de Lie est de Frobenius.*

Preuve. C'est une conséquence de la caractérisation des groupes presque algébriques qui admettent des séries discrètes, du théorème 4.3 et du fait qu'un groupe

linéaire non trivial ne possède pas de série discrète. ■

Corollaire 4.6. *On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Un sous-groupe biparabolique de $\mathrm{SO}(E)$ admet des séries discrètes si et seulement si son algèbre de Lie est de Frobenius.*

Preuve. Comme aucun groupe symplectique ou spécial orthogonal sur un espace complexe non trivial n'admet de série discrète, en suivant les lignes de la démonstration du corollaire 4.4, on voit qu'un sous-groupe parabolique de $\mathrm{SO}(E)$ admet des séries discrètes si et seulement si ses sous-groupes réductifs canoniques sont finis. ■

Références

- [1] Dergachev, V., et A. A. Kirillov, *Index of Lie algebras of seaweed type*, J. Lie Theory **10** (2000), 331–343.
- [2] Djebali, N., *Sous-groupes réductifs canoniques de groupes biparaboliques réels*, Bull. Sci. Math., à para tre, accepté en Octobre 2016 .
- [3] Duflo, M., Khalgui, M. S., et P. Torasso, *Algèbres de Lie quasi-réductives*, Transform. Groups **17** (2012), 417–470.
- [4] Moreau, A., et O. Yakimova, *Coadjoint orbits of reductive type of seaweed Lie algebras*, Int. Math. Res. Not. IMRN **19** (2012), 4475–4519.
- [5] Panyushev, D., *An extension of Rais' theorem and seaweed subalgebras of simple Lie algebras*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), 693–715.
- [6] Panyushev, D., et O. Yakimova, *On seaweed subalgebras and meander graphs in type D*, arXiv:1702.07879 [math.RT].

Nabila Djebali
 Université Tunis El Manar
 Faculté des Sciences de Tunis
 LR11ES11 Analyse
 Mathématiques et Applications
 2092, Tunis, Tunisie
 nabila.djebali@math.univ-poitiers.fr

Received October 25, 2016
 and in final form November 21, 2017