

Formes Linéaires de Type Réductif et Unipotent

Meher Bouhani

Communicated by A. Pasquale

Abstract. Utilisant le méandre associé, nous montrons que pour une sous-algèbre biparabolique d’une algèbre de Lie simple de type A ou C, les formes linéaires construites par P. Tauvel et R. Yu [Sur l’indice de certaines algèbres de Lie, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 54 (2004) 1793–1810] sont génériquement fortement régulières. De plus, nous montrons que cet ensemble de formes linéaires rencontre l’unique orbite de type réductif et unipotent. Enfin, nous donnons une nouvelle démonstration, directe et élémentaire, de la formule de l’indice conjecturée par Tauvel-Yu [loc. cit.] et démontrée par A. Joseph [On semi-invariants and index for biparabolic (seaweed) algebras I, J. Algebra 305 (2006) 487–515].

Mathematics Subject Classification: 17B45, 17B20, 22E60.

Key Words and Phrases: Index of biparabolic subalgebras, quasi-reductive Lie algebras, linear forms of reductive and unipotent type, meander graphs.

1. Introduction

Soit $\mathfrak{g}$ l’algèbre de Lie d’un groupe de Lie algébrique complexe G et $\mathfrak{g}^*$ son dual. On désigne par $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathfrak{g}$, par ${}^u\mathfrak{g}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$ et par $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ un facteur réductif de $\mathfrak{g}$ (voir [6]). Pour $f \in \mathfrak{g}^*$, on note $\mathfrak{g}_f$ le stabilisateur de f pour l’action coadjointe. On appelle indice de $\mathfrak{g}$ qu’on note $\chi(\mathfrak{g})$ la dimension minimale de $\mathfrak{g}_f$ lorsque f parcourt $\mathfrak{g}^*$.

Soit $\mathfrak{s}$ une algèbre de Lie simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}$, Δ un système de racines de $\mathfrak{s}$ et π une base de Δ . Deux racines $\alpha, \beta \in \Delta$ sont dites *fortement orthogonales* si $\alpha \pm \beta \notin \Delta$. Pour toute partie $\pi' \subset \pi$, Kostant associe un ensemble $\mathcal{K}_{\pi'}$ des sous-parties connexes (relativement au diagramme de Dynkin) de π' et il montre que l’ensemble $\Omega_{\pi'} := \{\xi_T, T \in \mathcal{K}_{\pi'}\}$, où ξ_T est la plus haute racine de T , est un système de racines fortement orthogonales (voir [9] et [18]). Pour toutes parties π' et π'' de π , on associe une unique sous-algèbre biparabolique (à conjugaison près) $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}^*$ de $\mathfrak{s}$. Soient $k_{\pi'} = \text{card}(\Omega_{\pi'})$, $k_{\pi''} = \text{card}(\Omega_{\pi''})$ et $E_{\pi', \pi''}$ le sous-espace de $\mathfrak{h}^*$ engendré par $\Omega_{\pi'} \cup \Omega_{\pi''}$. Dans [17], Tauvel et Yu ont construit au moyen de $\Omega_{\pi'} \cup \Omega_{\pi''}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}^*$ noté $V_{\pi', \pi''}$ (voir paragraphe 3.2). Ils ont montré que, génériquement, la dimension du stabilisateur d’un élément de $V_{\pi', \pi''}$ est majorée par $\dim(\mathfrak{h}) + k_{\pi'} + k_{\pi''} - 2 \dim(E_{\pi', \pi''})$, de sorte que l’on a :

$$\chi(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}^*) \leq \dim(\mathfrak{h}) + k_{\pi'} + k_{\pi''} - 2 \dim(E_{\pi', \pi''})$$

Ils ont conjecturé de plus l'égalité, cette conjecture a été démontrée par Joseph dans [10]. Dans cet article, nous décrivons toutes les formes fortement régulières de $V_{\pi', \pi''}$ (Théorème 5.12, Théorème 6.17), nous donnons une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ qui est unique à conjugaison près (Théorème 5.15, Théorème 6.18), et nous redémontrons en particulier la conjecture de Tauvel et Yu lorsque $\mathfrak{s}$ est de type A ou C (voir paragraphes 5 et 6).

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite quasi-réductive, s'il existe $f \in \mathfrak{g}^*$ telle que ${}^u(\mathfrak{g}_f) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, dans ce cas f est dite de type réductif. Si de plus la restriction de f à tout facteur réductif de $\mathfrak{g}_f$ est nulle, f est dite de type réductif et unipotent, son stabilisateur $\mathfrak{g}_f$ est appelé sous-algèbre réductive canonique de $\mathfrak{g}$. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite fortement quasi-réductive si elle est quasi-réductive et ${}^u\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, ce qui est le cas des sous-algèbres biparaboliques quasi-réductives d'une algèbre de Lie simple. Dans ce cas, l'ensemble des formes de type réductif et unipotent est une unique G -orbite (voir [7], Théorème 3.5.1).

De nombreux travaux concernent la classification des sous-algèbres biparaboliques quasi-réductives d'une algèbre de Lie simple $\mathfrak{s}$, il en résulte que les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{s}$ sont toutes quasi-réductives (voir [9]). De même, si $\mathfrak{s}$ est de type A ou C, toutes les sous-algèbres biparaboliques de $\mathfrak{s}$ sont quasi-réductives (voir [14]). Cependant, ceci n'est pas le cas pour $\mathfrak{s}$ de type B ou D, on trouvera une classification des sous-algèbres paraboliques quasi-réductives dans [7].

Dans [3], Dergachev et Kirillov associent à chaque sous-algèbre biparabolique $\mathfrak{q}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{s} = \mathfrak{gl}(n)$ un graphe appelé méandre associé à $\mathfrak{q}$ ou méandre de $\mathfrak{q}$, et au moyen de ce graphe, ils décrivent l'indice de $\mathfrak{q}$. Ce résultat a été généralisé au cas des sous-algèbres biparaboliques de $\mathfrak{s} = \mathfrak{sp}(n)$ dans [2] et [15], et au cas de celles de $\mathfrak{s} = \mathfrak{so}(n)$ dans [16]. Dans [12], Moreau et Yakimova donnent en terme du méandre associé la classe de conjugaison des sous-algèbres réductives canoniques des sous-algèbres biparaboliques lorsque $\mathfrak{s}$ est de type A. Elles décrivent également les classes de conjugaison des sous-algèbres réductives canoniques des sous-algèbres paraboliques quasi-réductives lorsque $\mathfrak{s}$ est symplectique ou orthogonale. Ce résultat a été généralisé au cas des sous-algèbres biparaboliques lorsque $\mathfrak{s}$ est une algèbre de Lie classique réelle différente de $\mathfrak{so}(p, q)$ dans [5], et lorsque $\mathfrak{s} = \mathfrak{so}(p, q)$ ou $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ dans [4].

Dans ce travail, nous montrons que pour une sous-algèbre biparabolique $\mathfrak{q}$ d'une algèbre de Lie simple de type A ou C, l'unique orbite de type réductif et unipotent de $\mathfrak{q}$ rencontre l'ensemble des formes linéaires construit par Tauvel et Yu dans [17], nous décrivons une forme φ^0 de type réductif et unipotent contenue dans cet ensemble, ainsi que toutes les formes u -équivalente à φ^0 (resp. de type réductif, de type unipotent) (voir définition 2.9) contenues dans celui-ci (Théorème 5.12, Théorème 6.17). Nous retrouvons en particulier la classe de conjugaison des sous-algèbres réductives canoniques de $\mathfrak{q}$ (Théorème 5.15, Théorème 6.18).

Dans toute la suite, les groupes et les algèbres de Lie considérés sont définis sur le corps des complexes.

Remerciements. Je tiens à remercier en tout premier lieu mes encadreurs Mohamed Salah Khalgui et Pierre Torasso pour leurs idées précieuses qui m'ont aidé

à obtenir ce résultat. Je remercie le Laboratoire de Mathématiques et Applications de l'Université de Poitiers, la fondation de Poitiers Université et le G.D.R. TLAG (Théorie de Lie Algébrique et Géométrie) pour leur soutien et pour les bonnes conditions d'accueil. Je remercie également la Faculté des Sciences de Tunis de l'Université de Tunis El Manar. Je remercie le Professeur Michel Duflo pour d'utiles idées.

2. Généralités

Soit G un groupe de Lie algébrique, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$, on désigne par $Z(G)$ (resp. $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$) le *centre* de G (resp. $\mathfrak{g}$), par uG (resp. ${}^u\mathfrak{g}$) le *radical unipotent* de G (resp. $\mathfrak{g}$) et par $R(G)$ (resp. $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$) un *facteur réductif* de G (resp. $\mathfrak{g}$) (voir [6]).

Au moyen de la représentation coadjointe, $\mathfrak{g}$ et G opèrent dans $\mathfrak{g}^*$ par :

$$(x.f)(y) = f([y, x]), \quad x, y \in \mathfrak{g} \text{ et } f \in \mathfrak{g}^*$$

$$(x.f)(y) = f(\text{Ad } x^{-1}y), \quad x \in G, y \in \mathfrak{g} \text{ et } f \in \mathfrak{g}^*$$

Pour $f \in \mathfrak{g}^*$, soit G_f le stabilisateur de f pour cette action et $\mathfrak{g}_f$ son algèbre de Lie:

$$G_f = \{x \in G; f(\text{Ad } x^{-1}y) = f(y), \quad y \in \mathfrak{g}\}$$

$$\mathfrak{g}_f = \{x \in \mathfrak{g}; f([x, y]) = 0, \quad y \in \mathfrak{g}\}$$

On appelle *indice* de $\mathfrak{g}$ l'entier $\chi(\mathfrak{g})$ défini par: $\chi(\mathfrak{g}) = \min\{\dim \mathfrak{g}_f, f \in \mathfrak{g}^*\}$.

Si $\chi(\mathfrak{g}) = 0$, $\mathfrak{g}$ est dite une *algèbre de Frobenius*.

Définition 2.1. Une forme linéaire f sur $\mathfrak{g}^*$ est dite *régulière* si $\dim \mathfrak{g}_f = \chi(\mathfrak{g})$.

Remarque 2.2. Le stabilisateur d'une forme régulière est commutatif (voir [8]). L'ensemble des éléments réguliers est un ouvert non vide de $\mathfrak{g}^*$ pour la topologie de Zariski, on le notera par $\mathfrak{g}_r^*$.

Définition 2.3. Une forme linéaire régulière $g \in \mathfrak{g}^*$ est dite *fortement régulière* si j_g , le facteur réductif de $\mathfrak{g}_g$ qui est un tore, est de dimension maximale lorsque g parcourt l'ensemble des formes régulières. On notera $\mathfrak{g}_{fr}^*$ l'ensemble des formes fortement régulières.

Remarque 2.4. (i) Les tores j_g , pour $g \in \mathfrak{g}_{fr}^*$ sont appelés les *sous-algèbres de Cartan-Duflo* de $\mathfrak{g}$, ils sont deux à deux conjugués sous l'action du groupe adjoint connexe de $\mathfrak{g}$ (voir [11], 1.18).

(ii) Si $\mathfrak{g}$ est réductive, les sous-algèbres de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$ sont les sous-algèbres de Cartan.

(iii) $\mathfrak{g}_{fr}^*$ est un ouvert de Zariski G -invariant non vide de $\mathfrak{g}^*$.

Définition 2.5. On appelle *rang* de $\mathfrak{g}$ et on note $\text{rang}(\mathfrak{g})$ la dimension commune des sous-algèbres de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$.

Définition 2.6. (i) Une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est dite *de type réductif* si ${}^u(\mathfrak{g}_g) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. On notera $\mathfrak{g}_{red}^*$ l'ensemble des formes de type réductif.

(ii) Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite *quasi-réductive* si $\mathfrak{g}_{red}^*$ est non vide.

Définition 2.7. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$, un sous-espace $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ est dit *coisotrope relativement à g* si: $\{x \in \mathfrak{g} ; g([x, y]) = 0, y \in \mathfrak{b}\} \subset \mathfrak{b}$.

Définition 2.8. On dit que $g \in \mathfrak{g}^*$ est *de type unipotent* si et seulement si g vérifie les conditions suivantes:

- (U1) La restriction de g à tout facteur réductif de $\mathfrak{g}_g$ est nulle.
- (U2) Il existe une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ telle que:
 - (i) $\mathfrak{b}$ est algébrique.
 - (ii) $\mathfrak{b}$ est coisotrope relativement à g .
 - (iii) $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}_g + {}^u\mathfrak{b}$. ■

Soit $\mathfrak{g}_u^*$ l'ensemble des formes de type unipotent. Il est invariant sous l'action du groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$. L'orbite d'un élément g de $\mathfrak{g}_u^*$ est dite de type unipotent.

Définition 2.9. [6] Soit $g \in \mathfrak{g}_u^*$, une forme $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ est dite *u -équivalente* à g , s'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ coisotrope relativement à g et une forme $f \in G.\lambda$ tels que $f|_{\mathfrak{b}} = g|_{\mathfrak{b}}$.

Remarque 2.10. Il a été démontré dans [7] (Théorème 3.4.1) que si $g \in \mathfrak{g}_{red}^*$, alors $g \in \mathfrak{g}_u^*$ si et seulement si la condition U_1 est vérifiée.

Théorème 2.11. ([7], Théorème 3.5.1) *Supposons que $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive et que ${}^u\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$. Alors $\mathfrak{g}_u^* \cap \mathfrak{g}_{red}^*$ est une G -orbite.*

Remarque 2.12. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Frobenius, alors $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ et $\mathfrak{g}_r^* = \mathfrak{g}_{fr}^* = \mathfrak{g}_{red}^* \cap \mathfrak{g}_u^*$. ■

Supposons que $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive, soit $\phi \in \mathfrak{g}_u^* \cap \mathfrak{g}_{red}^*$. On choisit une réalisation de $\mathfrak{g}$ comme sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}_\phi)$. On désigne par $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\mathfrak{r} = \{x \in \mathfrak{g}; [x, y] = 0, y \in \mathfrak{r}\}$, le centralisateur de $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}^1$ l'orthogonal de $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{h}$ pour la forme bilinéaire $(X, Y) \mapsto \text{Tr}(XY)$, c'est un idéal de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(\mathfrak{r}) \oplus \mathfrak{h}^1$. On a alors:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{r}) \oplus \mathfrak{h}^1 \oplus [\mathfrak{r}, \mathfrak{g}] \quad \text{de sorte que} \quad \mathfrak{g}^* = \mathfrak{z}(\mathfrak{r})^* \oplus (\mathfrak{h}^1)^* \oplus [\mathfrak{r}, \mathfrak{g}]^*.$$

Lemme 2.13. *Avec les notations précédentes, on a:*

- (a) $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}^1) = {}^u\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et $\phi \in (\mathfrak{h}^1)_r^*$.
- (b) *Supposons que ${}^u\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, alors:*
 - (i) $\mathfrak{h}^1$ est une algèbre de Frobenius.
 - (ii) *Réciproquement, si $f \in (\mathfrak{h}^1)_r^*$, soit $\tilde{f}$ le prolongement de f par 0 sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{r}) \oplus [\mathfrak{r}, \mathfrak{g}]$, alors $\tilde{f} \in \mathfrak{g}_u^* \cap \mathfrak{g}_{red}^*$.*

Preuve. Puisque $\phi \in \mathfrak{g}_u^*$ et $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}_\phi$, alors ϕ est nulle sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{r}) \oplus [\mathfrak{r}, \mathfrak{g}]$. D'autre part $\phi \in \mathfrak{g}_{red}^*$, donc ${}^u(\mathfrak{g}_\phi) = {}^u\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{h}^1)$. Comme $\mathfrak{h}^1$ normalise le sous-espace $\mathfrak{z}(\mathfrak{r}) \oplus [\mathfrak{r}, \mathfrak{g}]$, on voit alors que $\mathfrak{h}_\phi^1 = \mathfrak{g}_\phi \cap \mathfrak{h}^1$. Maintenant, soit $x = x_1 + x_2$ un élément de $\mathfrak{g}_\phi$ tel que $x_1 \in \mathfrak{r}$ et $x_2 \in {}^u\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, alors $x \in \mathfrak{h}$ si et seulement si $x_1 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{r})$, en particulier, on a $\mathfrak{g}_\phi \cap \mathfrak{h}^1 = {}^u\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Par suite on a: $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}^1) \subset \mathfrak{h}_\phi^1 = \mathfrak{g}_\phi \cap \mathfrak{h}^1 = {}^u\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Donc $\mathfrak{h}_\phi^1 = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}^1) = {}^u\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et $\phi \in (\mathfrak{h}^1)_r^*$ puisque $\chi(\mathfrak{h}^1) \geq \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h}^1)$. Si de plus ${}^u\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, alors $\mathfrak{h}_\phi^1 = 0$ et $\mathfrak{h}^1$ est une algèbre de Frobenius. Soit $\mathbf{H}$ le centralisateur de $\mathfrak{r}$ dans $\mathbf{G}$, alors $\phi \in (\mathfrak{h}^1)_r^* = \mathbf{H}.\phi$. Soit $f \in (\mathfrak{h}^1)_r^*$, il existe alors $x \in \mathbf{H}$ tel que $f = x.\phi$. Comme $\mathbf{H}$ normalise l'espace $\mathfrak{z}(\mathfrak{r})^* \oplus [\mathfrak{r}, \mathfrak{g}]^*$, alors $\tilde{f} = x.\phi$ et par suite $\tilde{f} \in \mathfrak{g}_u^* \cap \mathfrak{g}_{red}^*$. ■

Définition 2.14. Supposons que $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive et ${}^u\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$.

Soit $\phi \in \mathfrak{g}_u^* \cap \mathfrak{g}_{red}^*$, la sous-algèbre $\mathfrak{g}_\phi$ est appelée *sous-algèbre réductive canonique* de $\mathfrak{g}$ et on la notera $\mathfrak{r}_\mathfrak{g}$ (elle est unique à conjugaison près).

Lemme 2.15. Soit $\mathfrak{g} = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}_i$ somme directe d'algèbres de Lie algébriques, $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ et $\varphi_i = \varphi|_{\mathfrak{g}_i}$, $1 \leq i \leq n$. On a :

- (1) $\varphi \in \mathfrak{g}_{fr}^*$ si et seulement si $\varphi_i \in (\mathfrak{g}_i^*)_{fr}$, $1 \leq i \leq n$.
- (2) $\varphi \in \mathfrak{g}_{red}^*$ si et seulement si $\varphi_i \in (\mathfrak{g}_i^*)_{red}$, $1 \leq i \leq n$.
- (3) $\varphi \in \mathfrak{g}_u^*$ si et seulement si $\varphi_i \in (\mathfrak{g}_i^*)_u$, $1 \leq i \leq n$.

Preuve. Comme, pour tous $1 \leq i \neq j \leq n$, $\mathfrak{g}_i$ et $\mathfrak{g}_j$ commutent, on a directement $\mathfrak{g}_\varphi = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} (\mathfrak{g}_i)_\varphi$. Les trois assertions en résultent. ■

On en déduit alors le corollaire suivant.

Corollaire 2.16. (1) Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\mathfrak{j}_i$ une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}_i$. Alors $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{j}_i$ est une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$.

(2) Supposons que pour $1 \leq i \leq n$, $\mathfrak{g}_i$ est quasi-réductive et soit $\mathfrak{r}_i$ une sous-algèbre réductive canonique de $\mathfrak{g}_i$. Alors $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive et $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{r}_i$ est une sous-algèbre réductive canonique de $\mathfrak{g}$.

Lemme 2.17. Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{a}$ un produit semi-direct d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ et d'un idéal abélien $\mathfrak{a}$ contenu dans le radical unipotent de $\mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{g}^*$, $a = f|_{\mathfrak{a}}$, $\tilde{a}$ le prolongement de a par 0 sur $\mathfrak{g}_0$, $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_{\tilde{a}}$ et $\tilde{f} = f|_{\tilde{\mathfrak{g}}}$. Supposons que le centre de $\mathfrak{g}$ est formé d'éléments semi-simples et que $\mathbf{G}.(f|_{\mathfrak{a}})$ est une orbite ouverte dans $\mathfrak{a}^*$, alors :

- (1) $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive si et seulement si $\tilde{\mathfrak{g}}$ est quasi-réductive.
- (2) $\mathfrak{g}_f = (\tilde{\mathfrak{g}})_{\tilde{f}}$.
- (3) Supposons $\mathfrak{g}$ quasi-réductive, alors $f \in \mathfrak{g}_u^* \cap \mathfrak{g}_{red}^*$ si et seulement si $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{g}}_u^* \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{red}^*$.
- (4) $f \in \mathfrak{g}_{fr}^*$ si et seulement si $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{g}}_{fr}^*$.

Preuve. Pour (1) et (2), voir [12](Lemme 4.3), (3) résulte de (2) et de la remarque 2.10. D'après [13] (Lemme 1.4), $\chi(\mathfrak{g}) = \chi(\tilde{\mathfrak{g}})$. On déduit de (2) que $f \in \mathfrak{g}_r^*$ si et seulement si $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{g}}_r^*$, et puisque $\mathfrak{r}(\tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{f}}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}_f)$, alors $f \in \mathfrak{g}_{fr}^*$ si et seulement si $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{g}}_{fr}^*$. ■

Remarque 2.18. Le fait que l'orbite $\mathbf{G}.(f|_{\mathfrak{a}})$ soit ouverte dans $\mathfrak{a}^*$ équivaut à la condition $\mathfrak{g}_f \cap \mathfrak{a} = \{0\}$. En effet, $\mathbf{G}.(f|_{\mathfrak{a}})$ est une orbite ouverte dans $\mathfrak{a}^*$ si et seulement si $(\mathfrak{g}.f)|_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^*$. ■

Lemme 2.19. Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(0) \oplus \mathfrak{g}(1) \oplus \mathfrak{g}(2)$ une algèbre de Lie 3-graduée (signifiant que $[\mathfrak{g}(i), \mathfrak{g}(j)] \subset \mathfrak{g}(i+j)$, $0 \leq i, j \leq 2$ où $\mathfrak{g}(i) = 0$ pour $i \geq 3$), $f \in \mathfrak{g}^*$, $a = f|_{\mathfrak{g}(2)}$, $\tilde{a}$ le prolongement de a par 0 sur $\mathfrak{g}(0) \oplus \mathfrak{g}(1)$, $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_{\tilde{a}}$ et $\tilde{f} = f|_{\tilde{\mathfrak{g}}}$. Supposons que le centre de $\mathfrak{g}$ est formé d'éléments semi-simples et que $\mathfrak{g}_f \cap (\mathfrak{g}(1) \oplus \mathfrak{g}(2)) = \{0\}$. Alors :

- (1) $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive si et seulement si $\tilde{\mathfrak{g}}$ est quasi-réductive.
- (2) $\mathfrak{g}_f = \tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{f}}$.
- (3) Supposons $\mathfrak{g}$ quasi-réductive, alors $f \in \mathfrak{g}_u^* \cap \mathfrak{g}_{red}^*$ si et seulement si $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{g}}_u^* \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{red}^*$
- (4) $f \in \mathfrak{g}_{f_r}^*$ si et seulement si $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{g}}_{f_r}^*$

Preuve. Pour (1) et (2), voir [12] (Lemme 4.6), (3) résulte de (2) et de la remarque 2.3. D'après [13] (Lemme 1.5), $\chi(\mathfrak{g}) = \chi(\tilde{\mathfrak{g}})$, le résultat se déduit alors de (2). ■

3. Sous-algèbres biparaboliques d'une algèbre de lie semi-simple

3.1. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur le corps des complexes $\mathbb{C}$, k la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ définie par $k(x, y) = \text{Tr}(\text{ad}(x)\text{ad}(y))$ pour $x, y \in \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ le système de racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$, soit $\pi := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une base de racines simples, alors $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ où Δ^+ est l'ensemble des racines positives relativement à π et $\Delta^- = -\Delta^+$. Deux racines $\alpha, \beta \in \Delta$ sont dites fortement orthogonales si $\alpha \pm \beta \notin \Delta$. Pour $\alpha \in \Delta$, soient $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha(h_\alpha) = 2$ et $k(h_\alpha, h) = 0$ si $\alpha(h) = 0$, et $\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g}; [h, x] = \alpha(h)x, h \in \mathfrak{h}\}$, $\mathfrak{g}_\alpha$ est de dimension un. On choisit $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ tel que $\{X_\alpha, \alpha \in \Delta; h_\alpha, \alpha \in \pi\}$ soit une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$ (voir [1], 4.2.1) et on note $\{X_\alpha^*, \alpha \in \Delta; h_\alpha^*, \alpha \in \pi\}$ la base duale.

Pour tout sous-ensemble $\pi' \subset \pi$, soient $\Delta_{\pi'}^+ = \Delta^+ \cap \mathbb{N}\pi'$ où $\mathbb{N}\pi'$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de π' à coefficients dans $\mathbb{N}$, $\Delta_{\pi'}^- = -\Delta_{\pi'}^+$ et $\mathfrak{n}_{\pi'}^+$ (resp. $\mathfrak{n}_{\pi'}^-$) le sous-espace de $\mathfrak{g}$ somme directe des $\mathfrak{g}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{g}_{-\alpha}$), pour $\alpha \in \Delta_{\pi'}^+$. Alors $\Delta_{\pi'} := \Delta_{\pi'}^+ \cup \Delta_{\pi'}^-$ est un système de racines dont $\Delta_{\pi'}^+$ est un ensemble de racines positives et π' est une base de racines simples. De plus $\mathfrak{n}_{\pi'}^+$ et $\mathfrak{n}_{\pi'}^-$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ formées par des éléments nilpotents et on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_{\pi'}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi'}^-$, cette décomposition est appelée décomposition triangulaire de $\mathfrak{g}$.

Dans la suite, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \pi)$ désigne une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$, où $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et π est une base de racines simples du système de racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$.

Rappelons qu'une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre résoluble maximale (au sens de l'inclusion) de $\mathfrak{g}$. Une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre contenant une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$.

Définition 3.1. Pour tout sous-ensemble $\pi' \subset \pi$, la sous-algèbre $\mathfrak{p}_{\pi'} := \mathfrak{n}_{\pi'}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi'}^-$ (resp. $\mathfrak{p}_{\pi'}^- := \mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi'}^+$) est appelée sous-algèbre parabolique standard (resp. standard opposée) de $\mathfrak{g}$ associée à π' .

Remarque 3.2. (1) Toute sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ est conjuguée sous le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ à une sous-algèbre parabolique standard de $\mathfrak{g}$.

(2) Si $\pi' = \emptyset$, $\mathfrak{p}_{\pi'}$ (resp. $\mathfrak{p}_{\pi'}^-$) est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$.

Définition 3.3. Deux sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ sont dites opposées si leur somme est égale à $\mathfrak{g}$.

Définition 3.4. On appellera sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{g}$, toute intersection de deux sous-algèbres paraboliques opposées de $\mathfrak{g}$.

Remarque 3.5. Soient $\pi', \pi'' \subset \pi$, la sous-algèbre $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''} := \mathfrak{n}_{\pi'}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''}^- = \mathfrak{p}_{\pi'}^- \cap \mathfrak{p}_{\pi''}^-$ est appelée sous-algèbre biparabolique standard de $\mathfrak{g}$, et les sous-algèbres biparaboliques de $\mathfrak{g}$ sont toutes ainsi obtenues (à conjugaison près). ■

3.2. Rappelons que pour toute partie connexe (relativement au diagramme de Dynkin) $\pi' \subset \pi$, il existe une unique racine $\xi_{\pi'} \in \Delta_{\pi'}^+$ telle que, pour toute racine $\alpha \in \Delta_{\pi'}^+$, on a $\xi_{\pi'} + \alpha \notin \Delta_{\pi'}^+$, $\xi_{\pi'}$ est appelée la plus haute racine de $\Delta_{\pi'}^+$. Kostant a donné une construction d'un système de racines fortement orthogonales qu'on notera $\Omega_{\pi'}$ (voir [9] et [18]). Cette construction repose sur celle d'un ensemble $\mathcal{K}_{\pi'}$ de parties connexes de π' , appelé cascade de Kostant associée à π' et défini par récurrence sur le cardinal de π' de la manière suivante:

- (1) $\mathcal{K}_{\emptyset} = \emptyset$,
- (2) Si $\pi'_1, \dots, \pi'_s$ sont les composantes connexes de π' , alors $\mathcal{K}_{\pi'} = \mathcal{K}_{\pi'_1} \cup \dots \cup \mathcal{K}_{\pi'_s}$,
- (3) Si π' est connexe, alors $\mathcal{K}_{\pi'} = \{\pi'\} \cup \mathcal{K}_{\pi''}$ où $\pi'' = \{\alpha \in \pi'; \xi_{\pi'} - \alpha \notin \Delta_{\pi'}^+\}$.

Soient $\Omega_{\pi'} := \{\xi_T, \forall T \in \mathcal{K}_{\pi'}\}$ et $k_{\pi'}$ le cardinal de $\Omega_{\pi'}$, les éléments de $\Omega_{\pi'}$ sont deux à deux fortement orthogonaux. Le cardinal de Ω_{π} ne dépend que de $\mathfrak{g}$, on le notera par $k_{\mathfrak{g}}$. Le tableau suivant décrit l'entier $k_{\mathfrak{g}}$ pour tous les différents types d'algèbres de Lie simples $\mathfrak{g}$.

$A_{\ell}, \ell \geq 1$	$B_{\ell}, \ell \geq 2$	$C_{\ell}, \ell \geq 3$	$D_{\ell}, \ell \geq 4$	G_2	F_4	E_6	E_7	E_8
$\left\lfloor \frac{\ell+1}{2} \right\rfloor$	ℓ	ℓ	$2 \left\lfloor \frac{\ell}{2} \right\rfloor$	2	4	4	7	8

Table 1: $k_{\mathfrak{g}}$ [18]

On notera $V_{\pi', \pi''}$ le sous-espace de $\mathfrak{g}^*$ engendré par $\{X_{\xi}^*, \xi \in \Omega_{\pi'}\} \cup \{X_{-\xi}^*, \xi \in \Omega_{\pi''}\}$.

Lemme 3.6. [17] Soit $\pi' \subset \pi$ et pour tout $\xi \in \Omega_{\pi'}$ soient $\Delta_{\pi', \xi}^+ = \{\alpha \in \Delta_{\pi'}^+; \xi - \alpha \in \Delta_{\pi'}^+\} \cup \{\xi\}$ et $\mathfrak{g}^{\xi} = \sum_{\alpha \in \Delta_{\pi', \xi}^+} \mathbb{C}X_{\alpha}$. On a :

- (1) $\mathfrak{g}^{\xi}$ est une algèbre de Heisenberg de centre $\mathbb{C}X_{\xi}$, $\xi \in \Omega_{\pi'}$.
- (2) $\Delta_{\pi'}^+$ est réunion disjointe des ensembles $\Delta_{\pi', \xi}^+$, $\xi \in \Omega_{\pi'}$. De plus $\mathfrak{n}_{\pi'}^+ = \bigoplus_{\xi \in \Omega_{\pi'}} \mathfrak{g}^{\xi}$.

Théorème 3.7. [10] Soient $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ une sous-algèbre biparabolique d'une algèbre de Lie semi-simple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \pi)$ de rang n et $E_{\pi', \pi''}$ le sous-espace de $\mathfrak{h}^*$ engendré par $\Omega_{\pi'} \cup \Omega_{\pi''}$, alors :

$$\chi(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}) = n + (k_{\pi'} + k_{\pi''}) - 2 \dim(E_{\pi', \pi''}).$$

Lemme 3.8. [10] et [17] Soit $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ une sous-algèbre biparabolique d'une algèbre de Lie semi-simple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \pi)$, alors il existe un ouvert U de $(\mathbb{C}^\times)^{\Omega_{\pi'}} \times (\mathbb{C}^\times)^{\Omega_{\pi''}}$ tel que la forme $\varphi_{\pi', \pi''}$ définie par :

$$\varphi_{\pi', \pi''} = \sum_{\xi \in \Omega_{\pi'}} \lambda_\xi X_\xi^* + \sum_{\xi \in \Omega_{\pi''}} \mu_\xi X_{-\xi}^*$$

soit régulière dans $(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})^*$ pour tout $((\lambda_\xi)_{\xi \in \Omega_{\pi'}}, (\mu_\xi)_{\xi \in \Omega_{\pi''}}) \in U$. En particulier, on a $V_{\pi', \pi''} \cap (\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})_r^* \neq \emptyset$.

Lemme 3.9. (1) Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \pi)$ est une algèbre de Lie simple classique de type A ou C, soit $\varphi_{\mathfrak{g}}$ la forme linéaire de $\mathfrak{g}^*$ donnée par $\varphi_{\mathfrak{g}} = \sum_{\xi \in \Omega_\pi} (\lambda_\xi X_\xi^* + \mu_\xi X_{-\xi}^*)$ où $(\lambda_\xi, \mu_\xi)_{\xi \in \Omega_\pi} \in \mathbb{C}^{2k_\pi}$.

- (i) La forme $\varphi_{\mathfrak{g}}$ est de type réductif dans $\mathfrak{g}^*$ si et seulement si pour tout $\xi \in \Omega_\pi$, λ_ξ et μ_ξ vérifient la condition suivante :

$$\lambda_\xi = 0 \iff \mu_\xi = 0.$$

- (ii) La forme $\varphi_{\mathfrak{g}}$ est de type réductif et unipotent dans $\mathfrak{g}^*$ si et seulement si

$$\lambda_\xi = \mu_\xi = 0 \text{ pour tout } \xi \in \Omega_\pi \text{ (i.e } \varphi_{\mathfrak{g}} \text{ est nulle)}.$$

- (iii) La forme $\varphi_{\mathfrak{g}}$ est fortement régulière dans $\mathfrak{g}^*$ si et seulement si $\lambda_\xi \neq 0$, $\mu_\xi \neq 0$ pour tout $\xi \in \Omega_\pi$ et $\prod_{\xi \neq \xi' \in \Omega_\pi} (\lambda_\xi \mu_\xi - \lambda_{\xi'} \mu_{\xi'}) \neq 0$.

- (iv) Supposons que $\varphi_{\mathfrak{g}}$ est fortement régulière dans $\mathfrak{g}^*$, alors :

$\mathfrak{g}_{\varphi_{\mathfrak{g}}} = \bigoplus_{\xi \in \Omega_\pi} \mathbb{C}(\lambda_\xi X_{-\xi} + \mu_\xi X_\xi) \oplus \{h \in \mathfrak{h} \mid \xi(h) = 0, \xi \in \Omega_\pi\}$ est une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$.

(2) Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$, soient $(e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathfrak{gl}(n)$ et $\varphi_{\mathfrak{g}}$ la forme de $\mathfrak{g}^*$ définie par : $\varphi_{\mathfrak{g}} = \sum_{1 \leq i \leq [\frac{n}{2}]} \lambda_i (e_{i,n-i+1}^* - e_{n-i+1,i}^*)$, $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq [\frac{n}{2}]} \in \mathbb{C}^{[\frac{n}{2}]}$. Alors,

- (i) $\varphi_{\mathfrak{g}}$ est de type réductif dans $\mathfrak{g}^*$.
- (ii) $\varphi_{\mathfrak{g}}$ est fortement régulière dans $\mathfrak{g}^*$ si et seulement si $\prod_{1 \leq i < i' \leq [\frac{n}{2}]} (\lambda_i^2 - \lambda_{i'}^2) \neq 0$, et de plus, si n est impair, $\lambda_i \neq 0$, $1 \leq i \leq [\frac{n}{2}]$.
- (iii) $\varphi_{\mathfrak{g}}$ est de type réductif et unipotent dans $\mathfrak{g}^*$ si et seulement si $\lambda_i = 0$, $1 \leq i \leq [\frac{n}{2}]$.
- (iv) Supposons que $\varphi_{\mathfrak{g}}$ est fortement régulière dans $\mathfrak{g}^*$, alors :
- $\mathfrak{g}_{\varphi_{\mathfrak{g}}} = \bigoplus_{1 \leq i \leq [\frac{n}{2}]} \mathbb{C}(e_{i,n-i+1} - e_{n-i+1,i})$ est une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$.

Preuve. (1-i): Rappelons que la forme de Killing k est non dégénérée sur $\mathfrak{g}$. Identifions $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ au moyen de cette forme. Soit X_π l'élément de $\mathfrak{g}$ associé à $\varphi_{\mathfrak{g}}$. Comme la base de $\mathfrak{g}$ choisie $(\{X_\alpha, \alpha \in \Delta; h_\alpha, \alpha \in \pi\})$ est une base de Chevalley, il existe un nombre $c \neq 0$ tel que $X_\pi = c \sum_{\xi \in \Omega_\pi} (\mu_\xi X_\xi + \lambda_\xi X_{-\xi})$ (voir [17] et [18]). Alors $\varphi_{\mathfrak{g}}$ est de type réductif dans $\mathfrak{g}^*$ si et seulement si X_π est semi-simple. Or

celui-ci est semi-simple si et seulement si pour tout $\xi \in \Omega_\pi$, λ_ξ et μ_ξ vérifient la condition $\lambda_\xi = 0 \iff \mu_\xi = 0$.

(1-ii): Remarquons que $\bigoplus_{\xi \in \Omega_\pi} \mathbb{C}(\lambda_\xi X_{-\xi} + \mu_\xi X_\xi) \subset \mathfrak{g}_{\varphi_g}$. Compte tenu de (i) et de la Remarque 2.10, φ_g est de type réductif et unipotent dans $\mathfrak{g}^*$ si et seulement si $\varphi_g = 0$.

(1-iii): On suppose que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$. Si X_π n'est pas semi-simple, la forme φ_g n'est pas de type réductif et donc n'est pas fortement régulière. Supposons que X_π est semi-simple, soit $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} V_{\lambda_i}$, où $V_{\lambda_i} = \{v \in \mathbb{C}^n \mid X_\pi.v = \lambda_i v, \lambda_i \in \mathbb{C}\}$. Le stabilisateur de φ_g dans $\mathfrak{g}^*$ s'identifie au centralisateur de X_π dans $\mathfrak{g}$. Or, pour tout $y \in \mathfrak{g}$, $[y, X_\pi] = 0$ si et seulement si $y.V_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$, $1 \leq i \leq r$. Par conséquent, le centralisateur de X_π dans $\mathfrak{g}$ est un tore si et seulement si $\dim(V_{\lambda_i}) = 1$, $1 \leq i \leq r$, et puisque $\chi(\mathfrak{g}) = n - 1$, on en déduit que φ_g est fortement régulière dans $\mathfrak{g}^*$ si et seulement si $\lambda_\xi \neq 0$, $\mu_\xi \neq 0$, $\xi \in \Omega_\pi$ et $\prod_{\xi \neq \xi' \in \Omega_\pi} (\lambda_\xi \mu_\xi - \lambda_{\xi'} \mu_{\xi'}) \neq 0$.

De la même manière, on montre que: Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$, φ_g est fortement régulière dans $\mathfrak{g}^*$ si et seulement si $\lambda_\xi \neq 0$, $\mu_\xi \neq 0$, $\xi \in \Omega_\pi$ et $\prod_{\xi \neq \xi' \in \Omega_\pi} (\lambda_\xi \mu_\xi - \lambda_{\xi'} \mu_{\xi'}) \neq 0$.

(1-iv): Supposons que φ_g est fortement régulière dans $\mathfrak{g}^*$, nous recevons immédiatement $\bigoplus_{\xi \in \Omega_\pi} \mathbb{C}(\lambda_\xi X_{-\xi} + \mu_\xi X_\xi) \oplus \{h \in \mathfrak{h} \mid \xi(h) = 0, \xi \in \Omega_\pi\} \subseteq \mathfrak{g}_{\varphi_g}$. D'autre part, on vérifie que $\dim(\bigoplus_{\xi \in \Omega_\pi} \mathbb{C}(\lambda_\xi X_{-\xi} + \mu_\xi X_\xi) \oplus \{h \in \mathfrak{h} \mid \xi(h) = 0, \xi \in \Omega_\pi\}) = \dim \mathfrak{h}$. Le résultat s'en déduit du fait que $\dim \mathfrak{g}_{\varphi_g} = \chi(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{h}$.

(2): Le résultat se démontre d'une manière analogue à celle de 1). ■

Remarque 3.10. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réductive, alors $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est semi-simple, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est un tore commutatif et $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Pour tout $\varphi \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^*$, soit $\tilde{\varphi}$ le prolongement de φ par 0 sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, alors $\mathfrak{g}_{\tilde{\varphi}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_\varphi$ et $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{g}_{fr}^*$ (resp. $\mathfrak{g}_u^*$) si et seulement si $\varphi \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{fr}^*$ (resp. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_u^*$). Si $\mathfrak{j}$ est une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, alors $\mathfrak{j} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$.

Dans toute la suite, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réductive, on notera la forme $\tilde{\varphi}_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$ par φ_g et on désignera par $\mathfrak{J}_g$ une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$.

4. Méandre

Soient $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ deux compositions d'un entier $n \in \mathbb{N}^\times$, on pose $a_0 = b_0 = 0$. Pour tout $1 \leq i \leq m$ (resp. $1 \leq j \leq t$), soient θ_i (resp. θ'_j) l'involution de $I_i = [a_0 + \dots + a_{i-1} + 1, a_0 + \dots + a_i] \cap \mathbb{N}$ (resp. $J_j = [b_0 + \dots + b_{j-1} + 1, b_0 + \dots + b_j] \cap \mathbb{N}$) définie par $\theta_i(x) = 2(a_0 + \dots + a_{i-1}) + a_i - x + 1$, $x \in I_i$ (resp. $\theta'_j(y) = 2(b_0 + \dots + b_{j-1}) + b_j - y + 1$, $y \in J_j$). Soient $I = \cup_{1 \leq i \leq m} I_i = \cup_{1 \leq j \leq t} J_j = [1, n] \cap \mathbb{N}$. On associe à la paire $(\underline{a}, \underline{b})$, les deux involutions $\theta = \theta_{\underline{a}}$ et $\theta' = \theta'_{\underline{b}}$ de I telles que la restriction de θ (resp. θ') à I_i (resp. J_j) est égale à θ_i (resp. θ'_j), $1 \leq i \leq m$ (resp. $1 \leq j \leq t$). Soit $\mathbb{K} = \langle \theta, \theta' \rangle$ le groupe engendré par θ et θ' , il agit dans I .

On associe à la paire $(\underline{a}, \underline{b})$ un graphe noté $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ et appelé méandre associé à $(\underline{a}, \underline{b})$, dont les sommets sont n points consécutifs situés sur une droite horizontale D et numérotés $1, 2, \dots, n$. Il est construit de la manière suivante: on relie par un

arc au dessous (resp. au dessus) de la droite D toute paire de sommets distincts de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ de la forme $(x, \theta(x))$ (resp. $(x, \theta'(x))$), $x \in I$.

Exemple 4.1. $\Gamma(2, 4, 3 \mid 5, 2, 2) =$

Exemple 4.2. $\Gamma(3, 6 \mid 6, 3) =$

Remarque 4.3. (1) Soient $1 \leq i \leq m$ tel que $a_i > 1$ et $x, y \in I_i$, on a :

- (a) $\theta(x) - \theta(y) = y - x$.
- (b) Supposons que $x \leq y$, alors, pour tout $z \in I$, $\theta(z) \in [\theta(y), \theta(x)]$ si et seulement si $z \in [x, y]$.

(2) Soient $1 \leq j \leq t$ tel que $b_j > 1$ et $x, y \in J_j$, on a :

- (a) $\theta'(x) - \theta'(y) = y - x$.
- (b) Supposons que $x \leq y$, alors, pour tout $z \in I$, $\theta'(z) \in [\theta'(y), \theta'(x)]$ si et seulement si $z \in [x, y]$.

Soit $\mathbb{K}_0 = \langle \theta' \theta \rangle$, c'est un sous-groupe distingué et d'indice 2 du groupe fini $\mathbb{K}$. De plus $\mathbb{K}$ est le produit semi-direct de $\mathbb{K}_0$ par aussi bien le sous-groupe à deux éléments engendré par θ que par celui engendré par θ' . Par suite, les éléments de $\mathbb{K}$ sont de la forme $\theta^\epsilon (\theta' \theta)^e$, $\epsilon \in \{0, 1\}$ et $e \in [0, \text{card } \mathbb{K}_0 - 1] \cap \mathbb{Z}$. Pour tous $x \in I$, on considère la suite $(f^l(x))_{l \geq 0}$ définie par $f^{2l}(x) = (\theta' \theta)^l(x)$ et $f^{2l+1}(x) = \theta(f^{2l}(x))$. On a donc $\mathbb{K}.x = \{f^l(x), l \geq 0\}$.

Définition 4.4. Si X est un sous-graphe de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$, on note S_X l'ensemble des sommets de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ appartenant à X .

Lemme 4.5. Un sous-graphe connexe X de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ en est une composante connexe si et seulement si S_X est une $\mathbb{K}$ -orbite.

Preuve. Il suffit de remarquer que deux sommets distincts x et y de I sont liés par un arc si et seulement si $y = \theta(x)$ ou $y = \theta'(x)$. ■

Définition 4.6. Une composante connexe X de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ est dite un *cycle* si tout $x \in S_X$ est distinct de $\theta(x)$ et de $\theta'(x)$.

Une composante connexe X de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ est dite un *segment* si elle n'est pas un cycle (i.e. il existe $x \in S_X$ vérifiant $\theta(x) = x$ ou $\theta'(x) = x$).

Lemme 4.7. Soit X un cycle de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$, on a :

- (1) $\text{card}(S_X \cap I_i)$ est pair, $1 \leq i \leq m$.
- (2) $\text{card}(S_X \cap J_j)$ est pair, $1 \leq j \leq t$.
- (3) $\text{card}(S_X)$ est pair.

Preuve. (1) Résulte du fait que l'ensemble $S_X \cap I_i$ est invariant par θ , $1 \leq i \leq m$ et $\theta(x) \neq x$, $x \in X$.

- (2) De même, l'ensemble $S_X \cap J_j$ est invariant par θ' , $1 \leq j \leq t$ et $\theta'(x) \neq x$, $x \in X$.
 (3) Les ensembles $S_X \cap I_i$, $1 \leq i \leq m$ (resp. $S_X \cap J_j$, $1 \leq j \leq t$) sont deux à deux disjoints, de plus, on a $S_X = \cup_{1 \leq i \leq m} (S_X \cap I_i) = \cup_{1 \leq j \leq t} (S_X \cap J_j)$. D'où le résultat. ■

Soient X une composante connexe de $\Gamma(\underline{a}, \underline{b})$, $x \in S_X$ et $S_0 = \mathbb{K}_0.x$, on a $S_X = \mathbb{K}.x = S_0 \cup \theta S_0$. Soit $k = \text{card } S_0$. Alors la transformation $\theta'|_{S_0}$ est d'ordre k et, de plus, on a soit $S_0 \cap \theta S_0 = \emptyset$, soit $S_0 = \theta S_0$. Dans le second cas, X est un segment. En effet, dans ce cas, il existe deux entiers $0 \leq e \leq e' \leq k-1$ tel que $(\theta'\theta)^e(x) = \theta(\theta'\theta)^{e'}(x)$. En particulier, si on pose $l = \lceil \frac{e+e'-1}{2} \rceil$, et $y = (\theta'\theta)^l(x)$, on voit alors que $\theta(y) = y$, si $e+e'$ est pair, et $\theta'\theta(y) = \theta(y)$, si $e+e'$ est impair. De la même manière, on montre que dans le premier cas, X est un cycle de cardinal $2k$.

Corollaire 4.8. (Avec les notations précédentes) Soient X un cycle de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$, $x \in S_X$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{card}(S_X) = 2k$. On a :

- (1) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f^i(x) = x$ si et seulement si $i \equiv 0[2k]$.
 (2) Soient $0 \leq i \leq i' \leq 2k-1$ et $y \in S_X$ tels que $f^i(x) = f^{i'}(y)$, alors :
 (i) Si $i+i'$ est impair, on a : $f^{i+i'}(x) = y$ et $f^{i+i'}(y) = x$.
 (ii) Si $i+i'$ est pair, on a : $f^{2k+i-i'}(x) = y$ et $f^{i'-i}(y) = x$.

Lemme 4.9. Soient X un cycle de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ dont les sommets sont $x_1 < \dots < x_{2k}$. On a :

- (1) Pour tout $l \geq 0$, il existe $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq t$ tels que $\{f^l(x_1), f^l(x_2)\} \subset I_i \cap J_j$.
 (2) Pour tout $l \geq 0$,
 (i) Aucun sommet de X n'est compris entre $f^l(x_1)$ et $f^l(x_2)$.
 (ii) On a $|f^l(x_1) - f^l(x_2)| = x_2 - x_1$,
 (iii) On a $f^l(x_1) < f^l(x_2)$ si l est un entier pair, et $f^l(x_2) < f^l(x_1)$ si l est un entier impair.

Preuve. Comme $x_1 < x_2 \leq \theta(x_1)$ et $x_1 < x_2 \leq \theta'(x_1)$, on voit alors que l'assertion 1) est vérifiée pour $l = 0$. Soit $i > 0$, il résulte de la remarque 4.3 que s'il existe $1 \leq r \leq m$ et $1 \leq j \leq t$ tels que $\{f^i(x_1), f^i(x_2)\} \subset I_r \cap J_j$, alors, l'assertion 2) est vérifiée pour $l = i$ si et seulement si, elle est vérifiée pour $l = i-1$ et pour $l = i+1$. D'autre part, s'il existe $1 \leq j \neq j' \leq t$ tels que $f^i(x_1) \in J_j$ et $f^i(x_2) \in J_{j'}$, on voit que $\theta'f^i(x_1) - \theta'f^i(x_2)$ et $f^i(x_1) - f^i(x_2)$ sont de même signe. De même, s'il existe $1 \leq r \neq r' \leq m$ tels que $f^i(x_1) \in I_r$ et $f^i(x_2) \in I_{r'}$, alors $\theta f^i(x_1) - \theta f^i(x_2)$ et $f^i(x_1) - f^i(x_2)$ sont de même signe, ce qui contredit l'assertion 2)iii). On en déduit alors, d'une part, que si 2) est vérifiée pour tout $l \geq 0$, alors 1) est vérifiée pour tout $l \geq 0$, et d'autre part, que si 2) n'est pas vérifiée pour $l = i$, alors elle n'est vérifiée, ni pour $l = i+1$, ni pour $l = i-1$ si $i > 0$. Or, l'assertion 2) est vérifiée pour $l = 0$. D'où le résultat. ■

Corollaire 4.10. Soit X un cycle de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ dont les sommets sont $x_1 < \dots < x_{2k}$, alors pour tout $1 \leq i \leq k$, l'ensemble $\{x_i, x_{i+1}\}$ est de la forme $\{f^l(x_1), f^l(x_2)\}$ si

et seulement si, i est un entier impair. En particulier, si on pose $r = x_2 - x_1 + 1$, alors, les sommets de X sont de la forme $y_1 < y_1 + r - 1 < \dots < y_k < y_k + r - 1$.

Définition 4.11. Soit X un cycle de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ dont les sommets sont $x_1 < \dots < x_{2k}$. On appelle *bout* de X , un arc de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ joignant deux sommets de X de la forme $f^l(x_1)$ et $f^l(x_2)$, $l \in \mathbb{N}$.

On appelle dimension de X , l'entier naturel $x_2 - x_1 + 1$.

Définition 4.12. [12] Soit X un cycle de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ de dimension r dont les sommets sont $x_1 < x_1 + r - 1 < \dots < x_k < x_k + r - 1$. Un cycle (resp. segment) Y de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ est dit à l'intérieur de X s'il existe $y \in S_Y$ et $1 \leq i \leq k$ tel que $x_i \leq y \leq x_i + r - 1$. Un cycle X de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ est dit *maximal* s'il n'est pas à l'intérieur d'un autre cycle de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$.

Par convention, un segment X qui n'est pas contenu dans un cycle est considéré comme un cycle maximal de dimension 1.

Remarque 4.13. Soit X un cycle de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ de dimension r dont les sommets sont $x_1 < x_1 + r - 1 < \dots < x_k < x_k + r - 1$. Compte tenu du Lemme 4.9 et du corollaire 4.10, si Y est un cycle (resp. segment) de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ à l'intérieur de X , alors pour tout $y \in S_Y$, il existe $1 \leq i \leq k$ tel que $x_i \leq y \leq x_i + r - 1$. De plus, on a: $\dim(X) = 2 \text{card}\{\text{cycles se trouvant à l'intérieur}\} + \text{card}\{\text{segments se trouvant à l'intérieur}\} + 2$.

Lemme 4.14. *Tout cycle de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ a exactement deux bouts.*

Preuve. Soit X un cycle de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ dont les sommets sont $x_1 < \dots < x_{2k}$. Si $k = 1$, il est clair qu'on a uniquement deux bouts disjoints qui relient x_1 et x_2 .

Supposons $k > 1$, il existe alors $0 < i \leq 2k - 1$ tel que $f^i(x_1) = x_2$. Supposons que i est pair, alors $f^{2k-i}(x_2) = x_1$. Il résulte alors du Corollaire 4.3 que $f^{2k-i}(x_1) < f^{2k-i}(x_2) = x_1$, ce qui est absurde, par suite i est impair. Soit $s = \frac{i-1}{2}$, alors $f^{s+1}(x_1) = f^s(x_2)$, d'où $f^s(x_1)$ et $f^s(x_2)$ sont liés par un bout. D'autre part, $f^{2k+s+1}(x_1) = f^{s+1}(f^{2k}(x_1)) = f^{s+1}(x_1) = f^s(x_2)$, ce qui implique que $f^{k+s+1}(x_1) = f^{k+s}(x_2)$, d'où $f^{k+s}(x_1)$ et $f^{k+s}(x_2)$ sont liés par un bout. Pour montrer que les deux bouts sont distincts, il suffit de montrer que $\{f^s(x_1), f^s(x_2)\} \neq \{f^{s+k}(x_1), f^{s+k}(x_2)\}$.

Supposons que $f^s(x_1) = f^{s+k}(x_1)$, on a: Si k est pair, alors $f^k(x_1) = x_1$, ce qui est absurde. Si k est impair, alors $f^{2s+k}(x_1) = x_1$, d'où $2s + k \equiv 0[2k]$, par suite $k \equiv 0[2]$, ce qui est absurde.

Supposons que $f^s(x_1) = f^{s+k}(x_2)$, on a: Si k est pair, alors $f^k(x_1) = x_2$, par suite $k = 2s + 1$, ce qui est absurde. Si k est impair, alors $f^{2s+k}(x_1) = x_2$, par suite $2s + k \equiv 2s + 1[2k]$, d'où $k = 1$, ce qui est absurde.

Donc les deux bouts de X sont disjoints. Réciproquement, soit $0 \leq j \leq 2k - 1$ tel que $f^j(x_1)$ et $f^j(x_2)$ sont liés par un arc, alors, soit $\theta(f^j(x_1)) = f^j(x_2)$, soit $\theta'(f^j(x_1)) = f^j(x_2)$, donc, soit $f^{j+1}(x_1) = f^j(x_2)$, soit $f^{j-1}(x_1) = f^j(x_2)$. Il résulte du corollaire 4.8 qu'on a soit $j \in \{s, s+k\}$, soit $j-1 \in \{s, s+k\}$. Or, dans le second cas, on remarque que $\{f^j(x_1), f^j(x_2)\} = \{f^{j-1}(x_1), f^{j-1}(x_2)\}$. Par suite, $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ admet uniquement deux bouts distincts. D'où le résultat. ■

5. Sous-algèbres biparaboliques de $\mathfrak{gl}(n)$

Soit $\mathcal{V}$ un drapeau (croissant) de $\mathbb{C}^n$, i.e une suite $\mathcal{V} = \{V_0 = \{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m = \mathbb{C}^n\}$ de sous espaces de $\mathbb{C}^n$, on lui associe la composition de n , $a_{\mathcal{V}} = (a_1, \dots, a_m)$ où $a_i = \dim(V_i/V_{i-1})$, la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(n)$ qui stabilise $\mathcal{V}$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}(n)$ et on la notera par $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$. Toutes les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{gl}(n)$ sont ainsi obtenues. Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ deux drapeaux de $\mathbb{C}^n$, les deux sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ et $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}'}$ de $\mathfrak{gl}(n)$ sont dans la même $GL(n)$ -orbite si et seulement si $a_{\mathcal{V}} = a_{\mathcal{V}'}$.

Si $\mathcal{W} = \{\mathbb{C}^n = W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \cdots \supsetneq W_t = \{0\}\}$ est un drapeau décroissant de $\mathbb{C}^n$, on lui associe la composition de n , $\underline{b} = b_{\mathcal{W}} = (b_1, \dots, b_t)$ où $b_i = \dim_{\mathbb{C}}(W_{i-1}/W_i)$ et on notera encore $\mathfrak{p}_{\mathcal{W}}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(n)$ qui le stabilise.

Définition 5.1. Un drapeau croissant $\mathcal{V} = \{V_0 = \{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m = \mathbb{C}^n\}$ et un autre décroissant $\mathcal{W} = \{\mathbb{C}^n = W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \cdots \supsetneq W_t = \{0\}\}$ sont dits *opposés*, si $\dim(V_i \cap W_j) = \max(0, \dim V_i + \dim W_j - n)$ pour tout i, j .

Lemme 5.2. [5] *Les deux sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ et $\mathfrak{p}_{\mathcal{W}}$ sont opposées si et seulement si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont des drapeaux opposés.*

Définition 5.3. Soient $\mathcal{V} = \{V_0 = \{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m = \mathbb{C}^n\}$ et

$$\mathcal{W} = \{\mathbb{C}^n = W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \cdots \supsetneq W_t = \{0\}\}$$

deux drapeaux opposés, la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(n)$ qui les stabilise est alors une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{gl}(n)$ qu'on notera $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$ et toutes les sous-algèbres biparaboliques de $\mathfrak{gl}(n)$ sont ainsi obtenues. ■

Soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, à toute paire $(\underline{a}, \underline{b})$, où $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ sont deux compositions de n , on associe le drapeau $\mathcal{V} = \{V_0 = \{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m = \mathbb{C}^n\}$ où $V_i = \langle e_1, \dots, e_{a_1 + \dots + a_i} \rangle$, $1 \leq i \leq m$, et le drapeau $\mathcal{W} = \{\mathbb{C}^n = W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \cdots \supsetneq W_t = \{0\}\}$ où $W_i = \langle e_{b_1 + \dots + b_{i+1}}, \dots, e_n \rangle$, $1 \leq i \leq t-1$. On vérifie que les drapeaux $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont opposés et on désigne par $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$ la sous-algèbre $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$.

Remarque 5.4. (i) Toute sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{gl}(n)$ est conjuguée sous $GL(n)$ à une sous-algèbre $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$, où $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont des compositions de n .

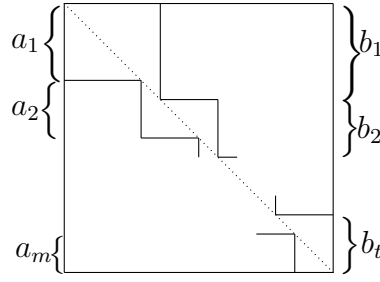
(ii) Pour toute composition $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ de n , soit $\tilde{\underline{a}} = (a_m, \dots, a_1)$. Les deux sous-algèbres biparaboliques $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$ et $\mathfrak{q}(\tilde{\underline{b}}, \tilde{\underline{a}})$ sont conjuguées par $GL(n)$.

(iii) $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b}) = \mathfrak{gl}(n)$ si et seulement si $\underline{a} = \underline{b} = (n)$.

(iv) $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}(n)$ si et seulement si $\underline{a} = (n)$ ou $\underline{b} = (n)$.

(v) $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$ est une sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{gl}(n)$ si et seulement si $\underline{a} = (n)$ et $\underline{b} = (1, \dots, 1)$ ou $\underline{b} = (n)$ et $\underline{a} = (1, \dots, 1)$.

(vi) $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$ est constituée des matrices de la forme suivante (Fig. 1).

Figure 1: les matrices de $\mathbf{q}(\underline{a} \mid \underline{b})$

Remarque 5.5. Le centre d'une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{gl}(n)$ est un tore commutatif inclus dans une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{gl}(n)$.

Theorème 5.6. [14] *Toute sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{gl}(n)$ est quasi-réductive.*

Soient $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ deux compositions de n . On considère le méandre $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$, défini au paragraphe 4, dit le méandre associé à $\mathbf{q}(\underline{a} \mid \underline{b})$ ou méandre de $\mathbf{q}(\underline{a} \mid \underline{b})$. Soient $a_0 = b_0 = 0$, $I_a = \{i \mid 1 \leq i \leq m \text{ et } a_i \neq 1\}$ et $I_b = \{i \mid 1 \leq i \leq t \text{ et } b_i \neq 1\}$. Pour tout $i \in I_a$ et $1 \leq j \leq [\frac{a_i}{2}]$, soient $d_{i,j}$ l'arc au dessous de la ligne qui relie les deux points numérotés $a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1} + j$ et $a_0 + a_1 + \dots + a_i - j + 1$ et $\nabla'' = \{d_{i,j}, i \in I_a, 1 \leq j \leq [\frac{a_i}{2}]\}$. Aussi pour tout $i \in I_b$ et $1 \leq j \leq [\frac{b_i}{2}]$, soient $c_{i,j}$ l'arc au dessus de la ligne qui relie les deux points numérotés $b_0 + b_1 + \dots + b_{i-1} + j$ et $b_0 + b_1 + \dots + b_i - j + 1$ et $\nabla' = \{c_{i,j}, i \in I_b, 1 \leq j \leq [\frac{b_i}{2}]\}$.

Soit $\mathbf{q}(\underline{a} \mid \underline{b})$ une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{gl}(n)$, où $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ sont deux compositions de n , alors $\mathbf{q}_s(\underline{a} \mid \underline{b}) := \mathbf{q}(\underline{a} \mid \underline{b}) \cap \mathfrak{sl}(n)$ est une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{sl}(n)$ et $\chi(\mathbf{q}_s(\underline{a} \mid \underline{b})) = \chi(\mathbf{q}(\underline{a} \mid \underline{b})) - 1$. L'ensemble des matrices diagonales de $\mathfrak{sl}(n)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}(n)$, on la notera $\mathfrak{h}$. Soit $(e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathfrak{gl}(n)$, $(e_{i,j}^*)_{1 \leq i,j \leq n}$ la base duale, Δ le système de racines de $\mathfrak{sl}(n)$ relativement à $\mathfrak{h}$ et $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ où $\alpha_i = e_{i,i}^* - e_{i+1,i+1}^*$, $1 \leq i \leq n-1$, la base de Δ de telle sorte que la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_\pi^+$ soit la sous-algèbre des matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{sl}(n)$. Il existe alors $\pi', \pi'' \subset \pi$ tels que $\mathbf{q}_s(\underline{a} \mid \underline{b}) = \mathbf{q}_{\pi', \pi''}$.

Lemme 5.7. (Avec les notations précédentes) *Soient $\mathbf{q}(\underline{a} \mid \underline{b})$ une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{gl}(n)$, où $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ et $\pi', \pi'' \subset \pi$ telle que $\mathbf{q}_s(\underline{a} \mid \underline{b}) = \mathbf{q}_{\pi', \pi''}$, on a :*

- (1) *L'ensemble ∇' (resp. ∇'') est en bijection avec $\Omega_{\pi'}$ (resp. $\Omega_{\pi''}$).*
- (2) $k_{\pi'} = \sum_{1 \leq i \leq t} [\frac{b_i}{2}]$ et $k_{\pi''} = \sum_{1 \leq i \leq m} [\frac{a_i}{2}]$.

Preuve. (1) Par convention, soit $a'_0 = b'_0 = 0$. Pour $i \in I_b$, soient $b'_i = b_1 + \dots + b_i$ et $\pi'_i = \{\alpha_{b'_{i-1}+1}, \dots, \alpha_{b'_i}\}$, pour $i \in I_a$, soient $a'_i = a_1 + \dots + a_i$ et $\pi''_i = \{\alpha_{a'_{i-1}+1}, \dots, \alpha_{a'_i}\}$. Alors on a :

- (i) $\pi' = \bigcup_{i \in I_b} \pi'_i$ et $\pi'' = \bigcup_{i \in I_a} \pi''_i$.

$$(ii) \quad \Omega_{\pi'} = \bigcup_{i \in I_b} \Omega_{\pi'_i} = \bigcup_{i \in I_b} \{ \xi_{i,j} = \alpha_{b'_{i-1}+j} + \cdots + \alpha_{b'_{i-j}} ; 1 \leq j \leq [\frac{b_i}{2}] \}.$$

$$(iii) \quad \Omega_{\pi''} = \bigcup_{i \in I_a} \Omega_{\pi''_i} = \bigcup_{i \in I_a} \{ \zeta_{i,j} = \alpha_{a'_{i-1}+j} + \cdots + \alpha_{a'_{i-j}} ; 1 \leq j \leq [\frac{a_i}{2}] \}.$$

On en déduit alors que les deux applications ψ' de ∇' dans $\Omega_{\pi'} : c_{i,j} \mapsto \xi_{i,j}$, $i \in I_b$, $1 \leq j \leq [\frac{b_i}{2}]$ et ψ'' de ∇'' dans $\Omega_{\pi''} : d_{i,j} \mapsto \zeta_{i,j}$, $i \in I_a$, $1 \leq j \leq [\frac{a_i}{2}]$, sont deux bijections.

(2) Par construction du méandre, on a : $card(\nabla') = \sum_{i \in I_b} [\frac{b_i}{2}] = \sum_{1 \leq i \leq t} [\frac{b_i}{2}]$ et $card(\nabla'') = \sum_{i \in I_a} [\frac{a_i}{2}] = \sum_{1 \leq i \leq m} [\frac{a_i}{2}]$, le résultat découle alors de (1). $\blacksquare$

Soient $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\underline{a} \mid \underline{b})$ une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{gl}(n)$, où $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ sont deux compositions de n , Δ le système de racines de $\mathfrak{sl}(n)$, $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ une base de Δ , et $\pi', \pi'' \subset \pi$ tels que $\mathfrak{q}_s(\underline{a} \mid \underline{b}) = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$. Supposons qu'il existe $1 \leq i \leq n-1$ tel que $\alpha_i \in \pi' \setminus \pi''$. Puisque toute racine $\beta \in \Delta$ s'écrit sous la forme $\beta = k_{1,\beta}\alpha_1 + \cdots + k_{n-1,\beta}\alpha_{n-1}$, $k_{i,\beta} \in \{-1, 0, 1\}$, alors la sous-algèbre de $\mathfrak{q}$ engendrée par $\{X_\beta \in \mathfrak{q}(\underline{a} \mid \underline{b}) ; k_{i,\beta} = 1\}$ est un idéal abélien contenu dans le radical unipotent de $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\underline{a} \mid \underline{b})$, on le notera $\mathfrak{q}_i$.

Soient $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ le méandre de $\mathfrak{q}(\underline{a} \mid \underline{b})$ et $\mathcal{C} = \{X_1, X_2, \dots, X_e\}$ l'ensemble des cycles maximaux de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$. Pour tout $1 \leq i \leq e$, soient $r_i = \dim(X_i)$ et $x_1^i \leq x_1^i + r_i - 1 \leq x_2^i \leq x_2^i + r_i - 1 \leq \cdots \leq x_{k_i}^i \leq x_{k_i}^i + r_i - 1$ les sommets de X_i .

Pour $1 \leq i \leq e$ tel que $r_i > 1$, soient A_0^i et B_0^i les deux arcs de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ qui sont les bouts du cycle X_i . Il existe alors $1 \leq t, t' \leq k_i$ tels que les sommets x_t^i et $x_t^i + r_i - 1$ (resp. $x_{t'}^i$ et $x_{t'}^i + r_i - 1$) soient reliées par A_0^i (resp. B_0^i).

Pour $0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1$, soient A_j^i (resp. B_j^i) l'arc de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ qui relie les points $x_t^i + j$ et $x_t^i + r_i - 1 - j$ (resp. $x_{t'}^i + j$ et $x_{t'}^i + r_i - 1 - j$),

$$\xi_j^i = \begin{cases} \psi'(A_j^i), & \text{si } A_j^i \in \nabla' \\ -\psi''(A_j^i), & \text{si } A_j^i \in \nabla'' \end{cases}, \quad \tilde{\xi}_j^i = \begin{cases} \psi'(B_j^i), & \text{si } B_j^i \in \nabla' \\ -\psi''(B_j^i), & \text{si } B_j^i \in \nabla'' \end{cases}$$

et $\Omega^i = \{\xi_j^i, \tilde{\xi}_j^i, 0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1\}$. Pour $1 \leq i \leq e$ tel que $r_i = 1$, on convient que $\Omega^i = \emptyset$. Soient

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{1 \leq i \leq e} \Omega^i \subseteq \Omega_{\pi'} \cup (-\Omega_{\pi''}), \quad \tilde{\Omega}_{\pi'} = \Omega_{\pi'} \setminus \overline{\Omega} \cap \Omega_{\pi'}, \quad \tilde{\Omega}_{\pi''} = \Omega_{\pi''} \setminus (-\overline{\Omega}) \cap \Omega_{\pi''},$$

$$\text{et} \quad \varphi(\underline{a} \mid \underline{b}) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq e \\ 0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1}} (x_j^i X_{\xi_j^i}^* + y_j^i X_{\tilde{\xi}_j^i}^*) + \sum_{\xi \in \tilde{\Omega}_{\pi'}} \lambda_\xi X_\xi^* + \sum_{\xi \in \tilde{\Omega}_{\pi''}} \mu_\xi X_{-\xi}^*,$$

$$\text{où} \quad ((x_j^i, y_j^i)_{\substack{1 \leq i \leq e \\ 0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1}}, (\lambda_\xi)_{\xi \in \tilde{\Omega}_{\pi'}}, (\mu_\xi)_{\xi \in \tilde{\Omega}_{\pi''}} \in \mathbb{C}^{k_{\pi'} + k_{\pi''}}.$$

Définition 5.8. On dira que $\varphi(\underline{a} \mid \underline{b})$ vérifie la propriété P si $\lambda_\xi \neq 0$, $\xi \in \tilde{\Omega}_{\pi'}$ et $\mu_\xi \neq 0$, $\xi \in \tilde{\Omega}_{\pi''}$.

Remarque 5.9. Nous distinguons les deux cas extrêmes :

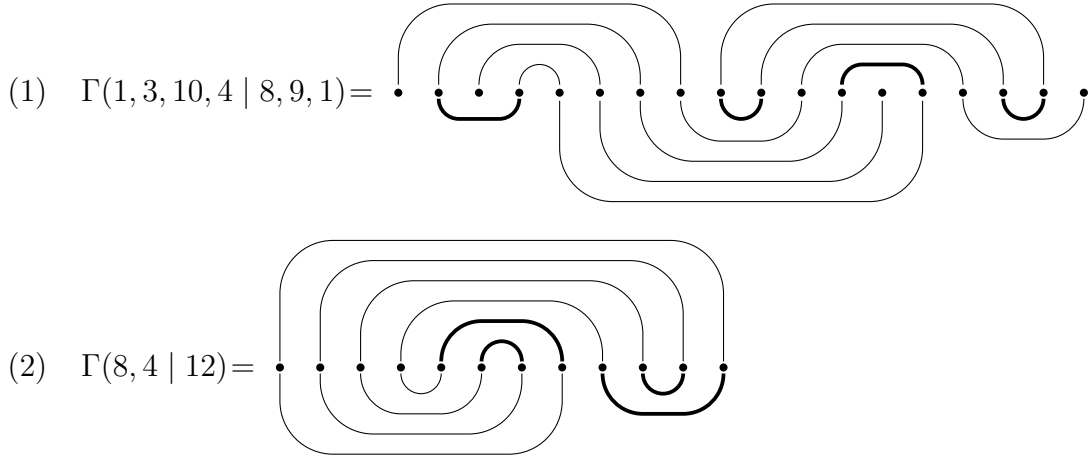
- (1) Supposons que $\underline{a} = \underline{b}$ (i.e. $\mathfrak{q}(\underline{a} \mid \underline{b}) = \bigoplus_{1 \leq i \leq m} \mathfrak{gl}(a_i)$), alors, $\tilde{\Omega}_{\pi'} = \tilde{\Omega}_{\pi''} = \emptyset$, pour $1 \leq i \leq m$ et $0 \leq j \leq \lfloor \frac{a_i}{2} \rfloor - 1$, on a $\tilde{\xi}_j^i = -\xi_j^i$, et par suite

$$\varphi_{(\underline{a} \mid \underline{b})} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq \lfloor \frac{a_i}{2} \rfloor - 1}} (x_j^i X_{\xi_j^i}^* + y_j^i X_{-\xi_j^i}^*).$$

De plus toutes les formes $\varphi_{(\underline{a} \mid \underline{b})}$ vérifient P .

- (2) Supposons $\underline{a} = (1, 1, \dots, 1)$ et $\underline{b} = n$ (i.e. $\mathfrak{q}(\underline{a} \mid \underline{b})$ est une sous algèbre de Borel de $\mathfrak{gl}(n)$), alors, $\tilde{\Omega}_{\pi'} = \Omega_{\pi}$, $\tilde{\Omega}_{\pi''} = \bar{\Omega} = \emptyset$, et $\varphi_{(\underline{a} \mid \underline{b})} = \sum_{\xi \in \Omega_{\pi}} \lambda_{\xi} X_{\xi}^*$.

Exemple 5.10. Les arcs $(A_j^i, B_j^i)_{\substack{1 \leq i \leq e \\ 0 \leq j \leq \lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor - 1}}$ sont représentés en gras dans les figures suivantes :



Lemme 5.11. Soient $\mathfrak{q}(\underline{a} \mid n)$ la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}(n)$ associée à la paire $(\underline{a}, n)$, où $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ est une composition de n . Supposons $a_1 < n$, alors $\mathfrak{q}_{a_1}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{q}(\underline{a} \mid n)$ formé par des éléments nilpotents. De plus $\mathfrak{q}(\underline{a} \mid n) = \mathfrak{gl}(a_1) \oplus \mathfrak{q}' \oplus \mathfrak{q}_{a_1}$, où $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}(a_2, \dots, a_m \mid n - a_1)$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}(n - a_1)$. Soit φ le prolongement de $\varphi_{(\underline{a} \mid n)|_{\mathfrak{q}_{a_1}}}$ par 0 sur $\mathfrak{gl}(a_1) \oplus \mathfrak{q}'$. Supposons $\varphi_{(\underline{a} \mid n)}$ vérifie P . Alors :

- (1) L 'orbite de φ dans $\mathfrak{q}_{a_1}^*$ est ouverte (i.e. $\mathfrak{q}(\underline{a} \mid n)_{\varphi} \cap \mathfrak{q}_{a_1} = \{0\}$).
- (2) Si $a_1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, on a :
- (i) $\mathfrak{q}(\underline{a} \mid n)_{\varphi} \simeq \mathfrak{q}(a_2, \dots, a_m \mid n - 2a_1, a_1) \subset \mathfrak{gl}(n - a_1)$.
 - (ii) $\varphi_{(\underline{a} \mid n)|_{\mathfrak{q}(\underline{a} \mid n)_{\varphi}}} = \varphi_{(a_2, \dots, a_m \mid n - 2a_1, a_1)}$ et $\varphi_{(a_2, \dots, a_m \mid n - 2a_1, a_1)}$ vérifie P .
- (3) Si $a_1 > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, on a :
- (i) $\mathfrak{q}(\underline{a} \mid n)_{\varphi} \simeq \mathfrak{q}(2a_1 - n, a_2, \dots, a_m \mid a_1) \subset \mathfrak{gl}(a_1)$.
 - (ii) $\varphi_{(\underline{a} \mid n)|_{\mathfrak{q}(\underline{a} \mid n)_{\varphi}}} = \varphi_{(2a_1 - n, a_2, \dots, a_m \mid a_1)}$ et $\varphi_{(2a_1 - n, a_2, \dots, a_m \mid a_1)}$ vérifie P .

Preuve. (1) Identifions $\mathfrak{q}_{a_1}^*$ à l'ensemble des matrices $M_{a_1, n-a_1}$. Le groupe de Lie $GL(a_1) \times GL(n-a_1)$ agit naturellement sur $M_{a_1, n-a_1} : (A, D).U = AUD^{-1}$, $(A, D) \in$

$GL(a_1) \times GL(n - a_1)$ et $U \in M_{a_1, n-a_1}$. Par restriction, le sous-groupe $GL(a_1) \times Q'$, où Q' est le sous-groupe parabolique d'algèbre de Lie $\mathfrak{q}'$, agit dans $M_{a_1, n-a_1}$. Cette action a une orbite ouverte dans $M_{a_1, n-a_1}$ formée par les matrices de rang maximal. Or, il est clair que φ vu comme élément de $M_{a_1, n-a_1}$ est de rang maximal si et seulement si, pour tout $\xi \in \tilde{\Omega}$ tel que $X_\xi \in \mathfrak{q}_{a_1}$, on a $\lambda_\xi \neq 0$.

Réciproquement, supposons que, pour tout $\xi \in \tilde{\Omega}$ tel que $X_\xi \in \mathfrak{q}_{a_1}$, on a $\lambda_\xi \neq 0$, on vérifie que φ est dans l'orbite ouverte de $GL(a_1) \times B_0$, où B_0 est la sous-groupe de Borel de $GL(n - a_1)$ formé par les matrices triangulaires supérieures. En particulier, si $\varphi_{(\underline{a}|n)}$ vérifie P , alors l'orbite de φ dans $\mathfrak{q}_{a_1}^*$ est ouverte.

(2-i) Voir Figure 2 où la forme $\varphi_{(\underline{a}|n)}$ est représentée en gras.

(2-ii) On reprend les notations du paragraphe 4, considérons $\Gamma(\underline{a} | n)$ le méandre de $\mathfrak{q}(\underline{a} | n)$, θ et θ' les deux involutions de $[1, n] \cap \mathbb{N}$ associés à la paire $(\underline{a} | n)$, soient $\mathbb{K} = \langle \theta, \theta' \rangle$ le groupe engendré par θ et θ' , $(f^e(x))_{e \geq 0}$ la suite définie par $f^{2e}(x) = (\theta'\theta)^e(x)$ et $f^{2e+1}(x) = \theta(f^{2e}(x))$, $x \in [1, n] \cap \mathbb{N}$.

Supposons $2a_1 \leq n$. Soient $\tilde{\theta} = \theta_{(a_2, \dots, a_m)}$ et $\tilde{\theta}' = \theta_{(a_1, n-2a_1)}$ les deux involutions associées à la paire $(a_2, \dots, a_k | n - 2a_1, a_1)$, vues comme des involutions de $[a_1 + 1, n] \cap \mathbb{N}$, $\tilde{\mathbb{K}} = \langle \tilde{\theta}, \tilde{\theta}' \rangle$ le groupe engendré par $\tilde{\theta}$ et $\tilde{\theta}'$. Le méandre $\Gamma(a_2, \dots, a_m | n - 2a_1, a_1)$ est obtenu alors en reliant par un arc au dessous (resp. au dessus) de la droite D, toute paire de sommets disjoints de la forme $(x, \tilde{\theta}(x))$ (resp. $(x, \tilde{\theta}'(x))$), $x \in [a_1 + 1, n] \cap \mathbb{N}$. Remarquons que $\tilde{\theta}$ est la restriction de θ à $[a_1 + 1, n] \cap \mathbb{N}$ et que $\tilde{\theta}'$ vérifie: $\tilde{\theta}'(x) = \theta'\theta\theta'(x)$ si $x \in [n - a_1 + 1, n]$ et $\tilde{\theta}'(x) = \theta'(x)$ si $x \in [a_1 + 1, n - a_1]$. Par suite, pour tout $x \in [a_1 + 1, n]$, on a $\mathbb{K}.x \cap [a_1 + 1, n] = \tilde{\mathbb{K}}.x$. Il en résulte que pour toute composante connexe X de $\Gamma(\underline{a} | n)$, $S_X \cap [a_1 + 1, n]$ est l'ensemble des sommets d'une composante connexe X' de $\Gamma(a_2, \dots, a_k | n - 2a_1, a_1)$. De plus, l'application $\Phi: X \mapsto X'$ est une bijection de l'ensemble des composantes connexes de $\Gamma(\underline{a} | n)$ sur l'ensemble des composantes connexes de $\Gamma(a_2, \dots, a_k | n - 2a_1, a_1)$. Soit $x \in [1, a_1]$, alors $\theta(x) = x$ si et seulement si $\tilde{\theta}'(\theta'(x)) = \theta'(x)$, ce qui permet d'en déduire que X est un cycle (resp. segment) de $\Gamma(\underline{a} | n)$ si et seulement si X' est un cycle (resp. segment) de $\Gamma(a_2, \dots, a_k | n - 2a_1, a_1)$. En particulier Φ conserve le nombre de cycles et le nombre de segments.

Soit X un cycle de $\Gamma(\underline{a} | n)$ tel que $S_X \cap [1, a_1] \neq \emptyset$, d'après le Lemme 4.7, $\text{card}(S_X \cap [1, a_1])$ est pair. Soient $S_X \cap [1, a_1] = \{x_1, \dots, x_{2i}\}$, on voit alors que les sommets de X sont de la forme $x_1 < \dots < x_{2i} < x_{2i+1} \dots \leq \theta'(x_{2i}) < \dots < \theta'(x_1)$, et les sommets de X' sont de la forme $x_{2i+1} \leq \dots \leq \theta'(x_{2i}) < \dots < \theta'(x_1)$. Soit x_{2i+2} , le plus petit sommet de X' supérieur à x_{2i+1} , il résulte du corollaire 4.10 que l'ensemble $\{x_{2i+1}, x_{2i+2}\}$ est de la forme $\{f^l(x_1), f^l(x_2)\}$. En particulier, Φ conserve la dimension des cycles. Pour tout $1 \leq j \leq 2i$, soient C_j (resp. D_j) l'arc de X reliant x_j et $\theta(x_j)$ (resp. x_j et $\theta'(x_j)$) et C'_j l'arc de $\Gamma(a_2, \dots, a_m | a_1, n-2a_1)$ reliant $\theta'(x_j)$ et $\theta'(\theta(x_j)) = \tilde{\theta}'(\theta'(x_j))$. Soit $1 \leq j \leq 2i$. Compte tenu de la Remarque 4.3 et du fait que $\text{card}(S_X)$ est pair, l'ensemble $\{x_j, \theta(x_j)\}$ est de la forme $\{x_{2l-1}, x_{2l}\}$ si et seulement s'il en est de même pour l'ensemble $\{\theta'(x_j), \theta'(\theta(x_j))\}$. En particulier, pour tout $1 \leq j \leq 2i$, C_j est un bout de X si et seulement si C'_j est un bout de X' .

Nous utilisons la notion suivantes dans les Figures 2–3 :

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(\inf\{a_1, n - a_1\})$$

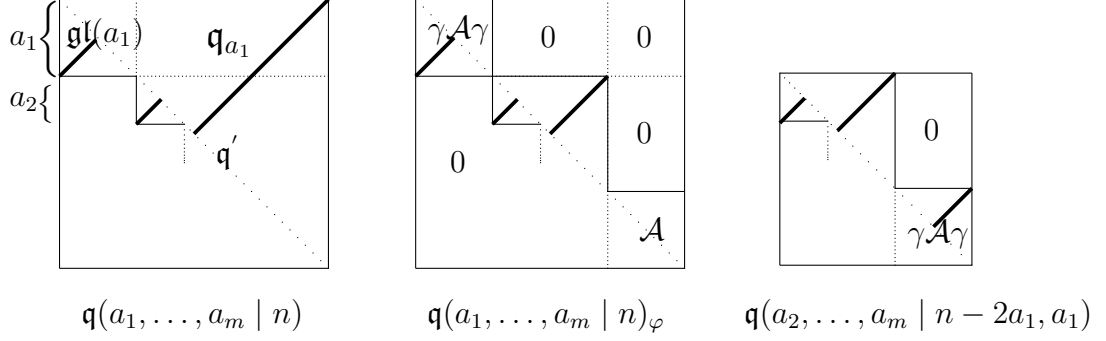


Figure 2: Réduction de $q(a_1, \dots, a_m \mid n)$ (cas1)

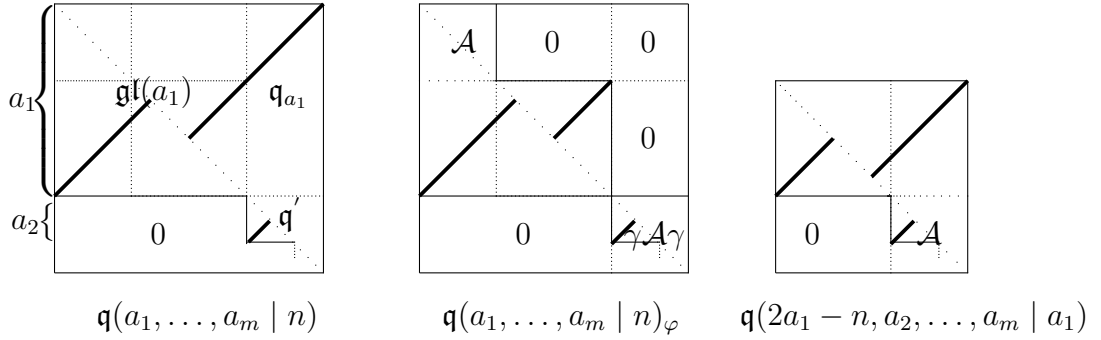


Figure 3: Réduction de $q(a_1, \dots, a_m \mid n)$ (cas2)

D'autre part, puisque $x_j \leq a_1 < \theta'(x_j)$, il résulte alors du Lemme 4.9 que l'ensemble $\{x_j, \theta'(x_j)\}$ n'est pas de la forme $\{f^l(x_1), f^l(x_2)\}$. Par suite, pour tout $1 \leq j \leq 2i$, l'arc D_j n'est pas un bout de X . On en déduit que Φ conserve les bouts de cycles.

Maintenant, pour tout $1 \leq i \leq [\frac{a_1}{2}]$, soit A_i (resp. B_i) l'arc de $\Gamma(\underline{a} \mid n)$ reliant i et $\theta(i)$ (resp. i et $\theta'(i)$) et A'_i l'arc de $\Gamma(a_2, \dots, a_m \mid n - 2a_1, a_1)$ reliant $\theta'(i)$ et $\theta'(\theta(i))$, on pose ξ_i , ζ_i et ξ'_i les racines associées respectivement aux arcs A_i , B_i et A'_i par les bijections définies dans la démonstrations du Lemme 5.7. On vérifie que pour tout $1 \leq i \leq [\frac{a_1}{2}]$, on a (voir Figure 2):

$$X_{\zeta_i|_{q(\underline{a}|n)_\varphi}}^* = 0 \quad \text{et} \quad \lambda X_{-\xi_i|_{q(\underline{a}|n)_\varphi}}^* = \lambda X_{\xi'_i|_{q(a_2, \dots, a_m|a_1, n-2a_1)}}^*, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Comme, pour tout $1 \leq i \leq [\frac{a_1}{2}]$, l'arc A_i est un bout d'un cycle de $\Gamma(\underline{a} \mid n)$ si et seulement si l'arc A'_i est un bout d'un cycle de $\Gamma(a_2, \dots, a_m \mid a_1, n - 2a_1)$, on

en déduit que $\varphi(\underline{a}|n)|_{\mathfrak{q}(\underline{a}|n)\varphi} = \varphi(a_2, \dots, a_m | n-2a_1, a_1)$. D'autre part, comme, pour tout $1 \leq i \leq [\frac{a_1}{2}]$, l'arc B_i n'est pas un bout d'un cycle de $\Gamma(\underline{a} | n)$, alors $\zeta_i \in \tilde{\Omega}_{\pi'}$, $1 \leq i \leq [\frac{a_1}{2}]$. Par suite $\varphi(\underline{a}|n)$ vérifie P si et seulement si $\lambda_{\zeta_i} \neq 0$, $1 \leq i \leq [\frac{a_1}{2}]$ et $\varphi(a_2, \dots, a_m | n-2a_1, a_1)$ vérifie P . En particulier, si $\varphi(\underline{a}|n)$ vérifie P , alors $\varphi(a_2, \dots, a_m | n-2a_1, a_1)$ vérifie P . D'où le résultat.

(3-i) Voir Figure 3 où la forme $\varphi(\underline{a}|n)$ est représentée en gras.

(3-ii) Supposons $2a_1 > n$. Soient $\tilde{\theta} = \theta_{(2a_1-n, a_2, \dots, a_m)}$ et $\tilde{\theta}' = \theta_{a_1}$ les deux involutions de $[1, a_1] \cap \mathbb{N}$ associées à la paire $(2a_1 - n, a_2, \dots, a_m | a_1)$, $\tilde{\mathbb{K}} = \langle \tilde{\theta}, \tilde{\theta}' \rangle$ le groupe engendré par $\tilde{\theta}$ et $\tilde{\theta}'$. Le méandre $\Gamma(2a_1 - n, a_2, \dots, a_m | a_1)$ est obtenu alors en reliant par un arc au dessous (resp. au dessus) de la droite D, toute paire de sommets disjoints de la forme $(x, \tilde{\theta}(x))$ (resp. $(x, \tilde{\theta}'(x))$), $x \in [1, a_1] \cap \mathbb{N}$. Remarquons que $\tilde{\theta}'$ est la restriction de θ à $[1, a_1] \cap \mathbb{N}$ et que $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}' \rho \tilde{\theta}'$, avec $\rho(x) = \theta' \theta \theta'(x)$ si $x \in [1, n - a_1]$ et $\rho(x) = \theta'(x)$ si $x \in [n - a_1 + 1, a_1]$. Par suite, pour tout $x \in [1, a_1]$, on a $\tilde{\mathbb{K}}.x \cap [1, a_1] = \tilde{\mathbb{K}}.x$

Le résultat se démontre d'une manière analogue à (1) (voir Figure 3). ■

Theorème 5.12. *Avec les notations précédentes, on a :*

- (i) $\varphi(\underline{a}|\underline{b})$ est de type réductif dans $\mathfrak{q}^*(\underline{a} | \underline{b})$ si et seulement si $\varphi(\underline{a}|\underline{b})$ vérifie P , ainsi que pour tous $1 \leq i \leq e$, $0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1$, x_j^i et y_j^i vérifient la condition suivante: $x_j^i = 0 \iff y_j^i = 0$.
- (ii) $\varphi(\underline{a}|\underline{b})$ est de type réductif et unipotent dans $\mathfrak{q}^*(\underline{a} | \underline{b})$ si et seulement si, $\varphi(\underline{a}|\underline{b})$ vérifie P , ainsi que $x_j^i = y_j^i = 0$, $1 \leq i \leq e$, $0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1$. On notera une telle forme par $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}^0$.
- (iii) $\varphi(\underline{a}|\underline{b})$ est u-équivalente à $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}^0$ si et seulement si elle vérifie P .
- (iv) $\varphi(\underline{a}|\underline{b})$ est une forme fortement régulière dans $\mathfrak{q}^*(\underline{a} | \underline{b})$ si et seulement si $\varphi(\underline{a}|\underline{b})$ vérifie P , ainsi que $x_j^i \neq 0$, $y_j^i \neq 0$, $0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1$ et $\prod_{0 \leq j < j' \leq [\frac{r_i}{2}] - 1} (x_j^i y_{j'}^i - x_{j'}^i y_j^i) \neq 0$, $1 \leq i \leq e$.

Preuve. Si $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b}) = \mathfrak{g}$, le résultat est clair d'après le Lemme 3.9. Supposons alors que $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b}) \subsetneq \mathfrak{g}$ et en plus qu'il existe $1 \leq m' \leq m$ et $1 \leq t' \leq t$ tels que $a_1 + \dots + a_{m'} = b_1 + \dots + b_{t'}$, alors

$$\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b}) = \mathfrak{q}(a_1, \dots, a_{m'} | b_1, \dots, b_{t'}) \oplus \mathfrak{q}(a_{m'+1}, \dots, a_m | b_{t'+1}, \dots, b_t)$$

$$\text{et} \quad \varphi(\underline{a}|\underline{b}) = \varphi(a_1, \dots, a_{m'} | b_1, \dots, b_{t'}) + \varphi(a_{m'+1}, \dots, a_m | b_{t'+1}, \dots, b_t).$$

D'après le Lemme 2.15, $\varphi(\underline{a}|\underline{b})$ est fortement régulière dans $\mathfrak{q}^*(\underline{a} | \underline{b})$ si et seulement si $\varphi(a_{m'+1}, \dots, a_m | b_{t'+1}, \dots, b_t)$ (resp. $\varphi(a_1, \dots, a_{m'} | b_1, \dots, b_{t'})$) est fortement régulière dans $\mathfrak{q}(a_{m'+1}, \dots, a_m | b_{t'+1}, \dots, b_t)^*$ (resp. $\mathfrak{q}^*(a_1, \dots, a_{m'} | b_1, \dots, b_{t'})$). Quitte à échanger $\underline{a}$ et $\underline{b}$, on peut se ramener au cas $a_1 < b_1$. Alors $\mathfrak{q}_{a_1}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$ formé par des éléments nilpotents. De plus $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b}) = \mathfrak{gl}(a_1) \oplus \mathfrak{q}' \oplus \mathfrak{q}_{a_1}$, où $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}(a_2, \dots, a_r | b_1 - a_1, b_2, \dots, b_t)$ est une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{gl}(n - a_1)$. Soit φ le prolongement de $\varphi(\underline{a}|\underline{b})|_{\mathfrak{q}_{a_1}}$ par 0 sur $\mathfrak{q}'$.

Le dual $\mathfrak{q}_{a_1}^*$ de $\mathfrak{q}_{a_1}$ s'identifie à l'espace vectoriel de matrices $M_{a_1, b_1 - a_1}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(a_1) \times \mathfrak{gl}(b_1 - a_1)$ agit naturellement sur $M_{a_1, b_1 - a_1}$: $(A, D).U = DU - UA$,

$(A, D) \in \mathfrak{gl}(a_1) \times \mathfrak{gl}(b_1 - a_1)$ et $U \in M_{a_1, b_1 - a_1}$. Soient $\mathfrak{p}_0 := \mathfrak{q}' \cap \mathfrak{gl}(b_1 - a_1)$ qui est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}(b_1 - a_1)$ et

$$\mathfrak{u} := \{(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b}) \mid X_{i,j} = 0, 1 \leq i \leq b_1\}.$$

Alors $\mathfrak{u}$ est un idéal de $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$ et l'action de $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$ dans $\mathfrak{q}_{a_1}^*$ passe au quotient par $\mathfrak{u}$ en l'action naturelle de la sous-algèbre $\mathfrak{gl}(a_1) \times \mathfrak{p}_0$ de $\mathfrak{gl}(a_1) \times \mathfrak{gl}(b_1 - a_1)$. Soit $\mathfrak{p} := \mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b}) \cap \mathfrak{gl}(b_1) = \mathfrak{gl}(a_1) \oplus \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{q}_{a_1}$ qui est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}(b_1)$. De plus $\mathfrak{q}_{a_1}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{p}$ formé par des éléments nilpotents. Il résulte du Lemme 5.11 que si $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}$ vérifie P , l'orbite de $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}|_{\mathfrak{q}_{a_1}}$ dans $\mathfrak{q}_{a_1}^*$ est ouverte.

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, $\mathfrak{gl}(b_1)$ la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(n)$ associée à la base $(e_1, \dots, e_{b_1})$. Alors $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})_\varphi = \mathfrak{p}_\varphi \oplus \mathfrak{u}$. Par suite le stabilisateur de φ dans $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$ est isomorphe à la sous algèbre $\mathfrak{q}(\underline{a}' | \underline{b}')$, où :

$$\begin{aligned} \underline{a}' &= (a_2, \dots, a_m) \text{ et } \underline{b}' = (b_1 - 2a_1, a_1, b_2, \dots, b_t) \text{ si } a_1 \leq \left\lfloor \frac{b_1}{2} \right\rfloor, \text{ et} \\ \underline{a}' &= (2a_1 - b_1, a_2, \dots, a_m) \text{ et } \underline{b}' = (a_1, b_2, \dots, b_t) \text{ si } a_1 > \left\lfloor \frac{b_1}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 5.11 et comme les formes $X_{-\xi}^*$, $\xi \in \Omega_{\pi_1}'$ et X_ξ^* , $\xi \in \Omega_{\pi_1}''$ (voir la définition de Ω_{π_1}' et Ω_{π_1}'' dans la démonstration du Lemme 5.7) s'annulent sur $\mathfrak{u}$, cette réduction laisse stable la forme $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}$, autrement dit, $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}|_{\mathfrak{q}(\underline{a}'|\underline{b}')} = \varphi_{(\underline{a}'|\underline{b}')}$ et $\varphi_{(\underline{a}'|\underline{b}')}$ vérifie P . En appliquant le Lemme 2.17 avec $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_{a_1}$, on déduit que $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})} \in \mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})_{fr}^*$ (resp. $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})_{red}^* \cap \mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})_u^*$) si et seulement si $\varphi_{(\underline{a}'|\underline{b}')} \in \mathfrak{q}(\underline{a}' | \underline{b}')_{fr}^*$ (resp. $\mathfrak{q}(\underline{a}' | \underline{b}')_{red}^* \cap \mathfrak{q}(\underline{a}' | \underline{b}')_u^*$). En répétant alors cette réduction, chaque cycle maximal X_i se réduit au méandre qui correspond à $\mathfrak{gl}(r_i)$ (voir [12]). La sous-algèbre $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$ se réduit alors à $\prod_{i=1}^e \mathfrak{gl}(r_i)$, et donc la restriction de $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}$ sera la forme $\phi := \bigoplus_{i=1}^e \varphi_{\mathfrak{gl}(r_i)}$, où $\varphi_{\mathfrak{gl}(r_i)}$ est la forme de $\mathfrak{gl}(r_i)^*$ définie au Lemme 3.9. D'après le Lemme 2.17, le Lemme 2.15 et le Lemme 3.9 on a :

- (1) ϕ est fortement régulière dans $\prod_{i=1}^e \mathfrak{gl}(r_i)^*$ si et seulement si $x_j^i \neq 0$, $y_j^i \neq 0$, $1 \leq i \leq e$, $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{r_i}{2} \right\rfloor - 1$ et $\prod_{1 \leq j \neq j' \leq \left\lfloor \frac{r_i}{2} \right\rfloor - 1} (x_j^i y_{j'}^i - x_{j'}^i y_j^i) \neq 0$, $1 \leq i \leq e$.
- (2) ϕ est de type réductif dans $\prod_{i=1}^e \mathfrak{gl}(r_i)^*$ si et seulement si, pour tous $1 \leq i \leq e$, $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{r_i}{2} \right\rfloor - 1$, x_j^i et y_j^i vérifient la condition suivante : $x_j^i = 0 \iff y_j^i = 0$.
- (3) ϕ est de type réductif et unipotent dans $\prod_{i=1}^e \mathfrak{gl}(r_i)^*$ si et seulement si nous avons $x_j^i = y_j^i = 0$, $1 \leq i \leq e$, $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{r_i}{2} \right\rfloor - 1$.

D'autre part, remarquons que $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}$ vérifie P si et seulement si, pour tout $\xi \in \tilde{\Omega}$ tel que $X_\xi \in \mathfrak{q}_{a_1}$, on a $\lambda_\xi \neq 0$, et $\varphi_{(\underline{a}'|\underline{b}')}$ vérifie P (voir figures 1 et 2). Or s'il existe ξ dans $\tilde{\Omega}$ tel que $X_\xi \in \mathfrak{q}_{a_1}$ et $\lambda_\xi = 0$, la restriction de $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}$ à $\mathfrak{q}_{a_1}$ n'est plus dans l'orbite ouverte de $\mathfrak{q}_{a_1}^*$, ce qui contredit le fait que $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}$ soit de type réductif dans $\mathfrak{q}^*(\underline{a} | \underline{b})$. D'où $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}$ n'est, ni de type réductif et unipotent, ni fortement régulière. Un raisonnement par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$ implique alors que si $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}$ ne vérifie pas P , elle n'est, ni de type réductif, ni fortement régulière.

(i), (ii) et (iv) se déduisent alors du Lemme 2.17.

(iii) Si $\mathfrak{b}'$ est une sous-algèbre coisotrope de type unipotent pour $\varphi_{(\underline{a}'|\underline{b}')}$, alors $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_{a_1} \oplus \mathfrak{b}'$ est une sous-algèbre coisotrope de type unipotent pour $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}$ (voir [6], I.20), par suite $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}$ est u -équivalente à $\varphi_{(\underline{a}|\underline{b})}^0$ si et seulement si $\varphi_{(\underline{a}'|\underline{b}')}$ est u -équivalente à $\varphi_{(\underline{a}'|\underline{b}')}^0$. Un raisonnement par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$ donne le résultat. ■

Exemple 5.13. Nous donnons dans cet exemple la réduction de $\mathfrak{q}(1, 3, 10, 4 | 8, 9, 1)$.

$$\begin{aligned}
 \Gamma(1, 3, 10, 4 | 8, 9, 1) &= \text{Diagram 1} \\
 \Gamma(3, 10, 4 | 6, 1, 9, 1) &= \text{Diagram 2} \\
 \Gamma(10, 4 | 3, 1, 9, 1) &= \text{Diagram 3} \\
 \Gamma(4, 3, 4 | 1, 9, 1) &= \text{Diagram 4} \\
 \Gamma(2, 1, 3, 4 | 9, 1) &= \text{Diagram 5} \\
 \Gamma(1, 3, 4 | 5, 2, 1) &= \text{Diagram 6} \\
 \Gamma(3, 4 | 3, 1, 2, 1) &= \text{Diagram 7} \quad \Gamma(3, 2, 1 | 3, 2, 1) = \text{Diagram 8}
 \end{aligned}$$

La sous-algèbre $\mathfrak{q}(1, 3, 10, 4 | 8, 9, 1)$ se réduit à $\mathfrak{gl}(3) \oplus \mathfrak{gl}(2) \oplus \mathfrak{gl}(1)$.

On reprend les notations précédentes. En particulier $X_1, \dots, X_e$ sont les cycles maximaux du méandre $\Gamma(\underline{a} | \underline{b})$ et $r_1, \dots, r_e$ est la suite de leurs dimensions respectives (voir définition 4.12). Pour $1 \leq i \leq e$, soit

$$x_1^i \leq x_1^i + r_i - 1 < x_2^i \leq x_2^i + r_i - 1 < \dots < x_{k_i}^i \leq x_{k_i}^i + r_i - 1,$$

la suite des sommets du cycle X_i rangés dans l'ordre croissant. Supposons que $k_i > 1$, deux sommets de X_i sont dits liés, s'ils sont reliés par un arc de $\Gamma(\underline{a} | \underline{b})$. Si

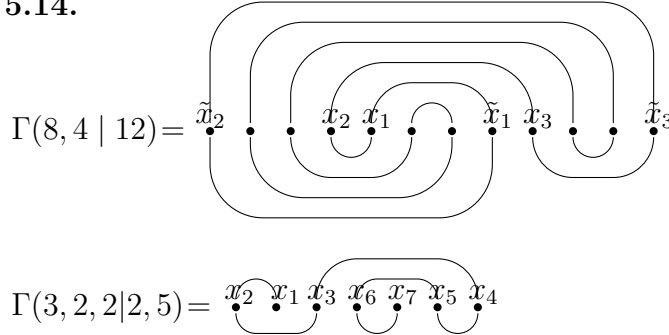
$r_i > 1$, alors chaque sommet de X_i est lié à deux autres sommets (resp. un autre sommet) si $k_i > 2$ (resp. $k_i = 2$). Si $r_i = 1$, X_i est donc un segment, chaque sommet de X_i est lié à deux autres sommets, sauf les deux sommets qui représentent les extrémités de X_i , où chacun d'eux est lié seulement à un autre sommet.

Nous ordonnons les sommets de X_i de la manière suivante:

- (1) Si $r_i > 1$, on écrit les sommets du cycle X_i comme la suite $x_1^i, \dots, x_{k_i}^i, \tilde{x}_{k_i}^i, \dots, \tilde{x}_1^i$ de sorte que:
 - * Le sommet x_1^i est placé à gauche du sommet $x_{k_i}^i$.
 - * Les sommets x_1^i et $x_1^i + r_i - 1$ (resp. $x_{k_i}^i$ et $x_{k_i}^i + (-1)^{k_i+1}(r_i - 1)$) sont reliés par un bout de X_i .
 - * Les sommets x_j^i et x_{j-1}^i sont liés pour $2 \leq j \leq k_i$.
 - * $\tilde{x}_j^i = x_j^i + (-1)^{j-1}(r_i - 1)$, $1 \leq j \leq k_i$.
- (2) Si $r_i = 1$, on écrit les sommets du cycle X_i comme la suite $x_1^i, \dots, x_{k_i}^i$ de sorte que:
 - * Le sommet x_1^i est placé à gauche du sommet $x_{k_i}^i$.
 - * x_1^i et $x_{k_i}^i$ sont les extrémités de X_i .
 - * Les sommets x_j^i et x_{j-1}^i sont liés pour $2 \leq j \leq k_i$.

Ce procédé revient à ranger les sommets du cycle X_i dans l'ordre où on les rencontre en parcourant le cycle toujours dans le même sens, partant du sommet x_1^i en direction du sommet $x_{k_i}^i$ puis, si $r_i > 1$, revenant au sommet x_1^i .

Exemple 5.14.



À chaque cycle X_i du méandre $\Gamma(\underline{a}, \underline{b})$, on associe un plongement ψ_i du produit tensoriel $\mathbb{C}^{r_i} \otimes \mathbb{C}^{k_i}$ dans $\mathbb{C}^n$: si on désigne par $e_1, \dots, e_n$ (resp. $f_1, \dots, f_{r_i}, g_1, \dots, g_{k_i}$) la base canonique de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{C}^{r_i}, \mathbb{C}^{k_i}$), le plongement ψ_i est donné par $\psi_i(f_u \otimes g_v) = e_{x_v + (-1)^{v-1}(u-1)}$, $1 \leq u \leq r_i$, $1 \leq v \leq k_i$. On a alors $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{1 \leq i \leq e} \text{Im}(\psi_i)$. Pour tout $1 \leq i \leq e$, $\mathfrak{gl}(r_i)$ agit dans $\text{Im}(\psi_i)$ de la manière suivante : $x.(f_u \otimes g_v) = x.f_u \otimes g_v$, $1 \leq u \leq r_i$, $1 \leq v \leq k_i$, et il agit trivialement dans $\text{Im}(\psi_j)$ pour $j \neq i$. Cette construction permet d'identifier $\prod_{i=1}^e \mathfrak{gl}(r_i)$ à une sous-algèbre de $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$. De ce qui précède, on déduit le Théorème suivant :

Théorème 5.15. Avec les notations précédentes, on a :

- (1) $\mathfrak{J}(\underline{a} | \underline{b}) := \prod_{i=1}^e \mathfrak{J}_{\mathfrak{gl}(r_i)}$ est une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$.
- (2) $\chi(\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})) = \sum_{1 \leq i \leq e} \dim(\mathfrak{J}_{\mathfrak{gl}(r_i)}) = 2 \times (\text{nombre de cycles}) + \text{nombre de segments}$.
- (3) $\mathfrak{r}(\underline{a} | \underline{b}) := \prod_{i=1}^e \mathfrak{gl}(r_i)$ est une sous-algèbre réductive canonique de $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$

Exemple 5.16. On reprend l'Exemple 5.13. Une forme de type réductif et unipotent de $\mathfrak{q}^*(1, 3, 10, 4 \mid 8, 9, 1)$ est donnée par: $\varphi_{(8,9,1 \mid 1,3,10,4)}^0 = e_{5,14}^* + e_{6,13}^* + e_{7,12}^* + e_{8,11}^* + e_{15,18}^* + e_{8,1}^* + e_{7,2}^* + e_{6,3}^* + e_{5,4}^* + e_{17,9}^* + e_{16,10}^* + e_{15,11}^*$.

Considérons les matrices :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma A \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma B \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (*)$$

où $a \in \mathbb{C} = \mathfrak{gl}(1)$, $A \in \mathfrak{gl}(3)$ et $B \in \mathfrak{gl}(2)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$ constituée des matrices de la forme $(*)$ est une sous-algèbre réductive canonique de $\mathfrak{q}(1, 3, 10, 4 \mid 8, 9, 1)$. La sous-algèbre de $\mathfrak{r}$ constituée des matrices pour lesquelles A et B sont diagonales est une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{q}(1, 3, 10, 4 \mid 8, 9, 1)$.

Dans ce paragraphe, nous redémontrons le Théorème 3.7 dans le cas $\mathfrak{sl}(n)$. Soit

$$k^{imp} = |\{1 \leq i \leq m : a_i \text{ est impair}\}| + |\{1 \leq j \leq t : b_j \text{ est impair}\}|$$

et

$$k_r^{imp} = |\{1 \leq i \leq e : r_i \text{ est impair}\}|.$$

Puisque $\sum_{1 \leq i \leq m} a_i = \sum_{1 \leq j \leq t} b_j = n$, l'entier k^{imp} est alors pair. À chaque i (resp. j) tel que a_i (resp. b_j) est un entier impair correspond un point fixe de θ (resp. θ'). Or, les extrémités des segments correspondent exactement aux points fixes de θ et θ' , ce qui permet de conclure que le nombre de segments de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ est égal à $\frac{1}{2}k^{imp}$.

D'autre part, si X_i est un cycle maximal de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ de dimension r_i , alors r_i est impair si et seulement si X_i est un segment ou X_i contient un segment à l'intérieur. Remarquons que chaque point fixe à l'intérieur d'un cycle est nécessairement situé à l'intérieur d'un bout de ce cycle.

Comme chaque cycle a uniquement deux bouts, il résulte que si r_i est impair et est supérieur à 1, le cycle X_i contient exactement un segment. Par suite, le nombre de segments de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ est égal aussi à k_r^{imp} . On a donc:

$$\frac{1}{2} k^{imp} = k_r^{imp}$$

Soient $\pi', \pi'' \subset \pi$, telles que $\mathfrak{q}_s(\underline{a} \mid \underline{b}) = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$, D'après le Lemme 5.7 (2), on a:

$$k_{\pi'} + k_{\pi''} = \sum_{1 \leq j \leq t} \left[\frac{b_j}{2} \right] + \sum_{1 \leq i \leq m} \left[\frac{a_i}{2} \right] = n - \frac{1}{2} k^{imp} = n - k_r^{imp}$$

Soit $(e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathfrak{gl}(n)$, $\{X_j\}_{1 \leq j \leq \sum_{i=1}^e \lceil \frac{r_i+1}{2} \rceil}$ l'ensemble des composantes connexes de $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ et $x_1^j < \dots < x_{k_j}^j$ les sommets de X_j , $1 \leq j \leq \sum_{i=1}^e \lceil \frac{r_i+1}{2} \rceil$.

Alors $\cap_{\xi \in \Omega_{\pi'} \cup \Omega_{\pi''}} \ker(\xi) = \langle e_{x_1^j, x_1^j} + \cdots + e_{x_{k_j}^j, x_{k_j}^j}, 1 \leq j \leq \sum_{i=1}^e [\frac{r_i+1}{2}] \rangle$. D'où:

$$\begin{aligned} \dim(E_{\pi', \pi''}) &= n - \sum_{i=1}^e [\frac{r_i+1}{2}], \quad \text{et enfin} \\ (n-1) - \dim(E_{\pi', \pi''}) + k_{\pi'} + k_{\pi''} - \dim(E_{\pi', \pi''}) &= 2 \sum_{i=1}^e [\frac{r_i+1}{2}] - k_r^{\text{imp}} - 1 = \\ &= \sum_{i=1}^e r_i - 1 = \chi(\mathfrak{q}(\underline{a} \mid \underline{b})) - 1 = \chi(\mathfrak{q}_s(\underline{a} \mid \underline{b})) \end{aligned}$$

Corollaire 5.17. (1) La sous-algèbre $\mathfrak{q}_s(\underline{a} \mid \underline{b})$ de $\mathfrak{sl}(n)$ est une sous-algèbre de Frobenius si et seulement si $\Gamma(\underline{a} \mid \underline{b})$ est un seul segment.

(2) Supposons que $\mathfrak{q}_s(\underline{a} \mid \underline{b}) = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ est une algèbre de Frobenius, alors la forme

$$\varphi_{(\underline{a} \mid \underline{b})} = \sum_{\xi \in \Omega_{\pi'}} \lambda_{\xi} X_{\xi}^* + \sum_{\xi \in \Omega_{\pi''}} \mu_{\xi} X_{-\xi}^*$$

est régulière, donc fortement régulière et de type réductif et unipotent de $\mathfrak{q}_s(\underline{a} \mid \underline{b})^*$ si et seulement si $\lambda_{\xi} \neq 0, \xi \in \Omega_{\pi'}$ et $\mu_{\xi} \neq 0, \xi \in \Omega_{\pi''}$.

Exemple 5.18. Soient $\mathfrak{q}_s(3, 2, 2 \mid 2, 5)$ et $\Gamma(3, 2, 2 \mid 2, 5) = \bullet \overset{\curvearrowright}{\bullet} \bullet \overset{\curvearrowright}{\bullet} \bullet \overset{\curvearrowright}{\bullet}$.

Alors $\chi(\mathfrak{q}_s(3, 2, 2 \mid 2, 5)) = 0$, $\varphi_{(3, 2, 2 \mid 2, 5)} = e_{1,2}^* + e_{3,7}^* + e_{4,6}^* + e_{7,6}^* + e_{5,4}^* + e_{3,1}^*$, est fortement régulière et est de type réductif et unipotent de $\mathfrak{q}_s(3, 2, 2 \mid 2, 5)^*$. Elle est représentée en gras dans la figure suivante:

$$\mathfrak{q}_s(3, 2, 2 \mid 2, 5) = \begin{pmatrix} * & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & * & * & * & * & * & \star \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \star & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & * \end{pmatrix}.$$

6. Sous algèbres biparaboliques de $\mathfrak{sp}(2n)$

Soit γ la matrice introduite dans la démonstration du Lemme 5.11 et B une forme bilinéaire symplectique dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$ est donnée par:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $Sp(2n) = \{g \in GL(2n) \mid {}^t g B g = B\}$, le sous-groupe de $GL(2n)$ qui laisse B invariante, et $\mathfrak{sp}(2n)$ son algèbre de Lie. Alors :

$$\mathfrak{sp}(2n) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2n) ; \mathcal{D} = -\check{\mathcal{A}}, \mathcal{B} = \check{\mathcal{B}} \text{ et } \mathcal{C} = \check{\mathcal{C}}. \right\}$$

où $\check{\mathcal{A}} = \gamma({}^t \mathcal{A})\gamma$ est la transposée de $\mathcal{A}$ par rapport à l'antidiagonale.

Soit $\mathcal{V} = \{V_0 = \{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m\}$ un drapeau (croissant) de sous-espaces totalement isotropes de $\mathbb{C}^{2n}$, on lui associe la suite $a_{\mathcal{V}} = (a_1, \dots, a_m)$ où $a_i = \dim(V_i/V_{i-1})$, alors $\sum_{1 \leq i \leq m} a_i = \dim(V_m) \leq n$. La sous-algèbre de $\mathfrak{sp}(2n)$ qui le stabilise est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{sp}(2n)$ et on la notera $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$. Les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{sp}(2n)$ sont toutes ainsi obtenues. Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ deux drapeaux de $\mathbb{C}^{2n}$, les deux-sous algèbres paraboliques $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ et $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}'}$ de $\mathfrak{sp}(2n)$ sont dans la même classe de conjugaison sous $Sp(2n)$ si et seulement si $a_{\mathcal{V}} = a_{\mathcal{V}'}$.

De même, si $\mathcal{W} = \{W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \cdots \supsetneq W_t = \{0\}\}$ est un drapeau décroissant de sous-espaces totalement isotropes de $\mathbb{C}^{2n}$, on lui associe la suite $\underline{b} = b_{\mathcal{W}} = (b_1, \dots, b_t)$ où $b_i = \dim_{\mathbb{C}}(W_{t-i}/W_{t-i+1})$ et on notera $\mathfrak{p}_{\mathcal{W}}$ la sous algèbre parabolique qui le stabilise.

Définition 6.1. Un drapeau croissant de sous-espaces totalement isotropes $\mathcal{V} = \{V_0 = \{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m = \mathbb{C}^n\}$ et un autre drapeau décroissant de sous-espaces totalement isotrope $\mathcal{W} = \{\mathbb{C}^n = W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \cdots \supsetneq W_t = \{0\}\}$ sont dits *opposés*, si $\dim(V_i \cap W_j^{\perp}) = \max(0, \dim V_i - \dim W_j)$ pour tout i, j .

Remarque 6.2. La condition $\dim(V_i \cap W_j^{\perp}) = \max(0, \dim V_i - \dim W_j)$ entraîne en particulier $V_i \cap W_j = 0$ pour tout i, j .

Lemme 6.3. [5] *Les deux sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ et $\mathfrak{p}_{\mathcal{W}}$ sont opposées si et seulement si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont des drapeaux opposés.*

Définition 6.4. Soient $\mathcal{V} = \{V_0 = \{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m = \mathbb{C}^n\}$ et

$$\mathcal{W} = \{\mathbb{C}^n = W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \cdots \supsetneq W_t = \{0\}\}$$

deux drapeaux de sous-espaces totalement isotropes opposés, la sous algèbre de $\mathfrak{sp}(2n)$ qui les stabilise est une sous algèbre biparabolique de $\mathfrak{sp}(2n)$ qu'on notera $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$ et les sous-algèbres biparaboliques de $\mathfrak{sp}(2n)$ sont toutes ainsi obtenues. ■

Soit $e_1, \dots, e_n, f_n, \dots, f_1$ la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$. Pour toute paire de suites $(\underline{a}, \underline{b})$ où $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ vérifiant $a_1 + \cdots + a_m \leq n$ et $b_1 + \cdots + b_t \leq n$, on associe la paire de drapeaux $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ où $\mathcal{V} = \{V_0 = \{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m\}$ et $\mathcal{W} = \{W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \cdots \supsetneq W_t = \{0\}\}$, avec $V_i = \langle e_1, \dots, e_{a_1 + \cdots + a_i} \rangle$, $1 \leq i \leq m$ et $W_j = \langle f_1, \dots, f_{b_t + \cdots + b_{j+1}} \rangle$, $0 \leq j \leq t-1$. On vérifie que les drapeaux $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont opposés et on désigne par $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ la sous-algèbre $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$.

Remarque 6.5. (i) Toute sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{sp}(2n)$ est conjuguée sous $Sp(2n)$ à une sous-algèbres $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$, où $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont chacune une composition d'un entier naturel inférieur ou égal à n .

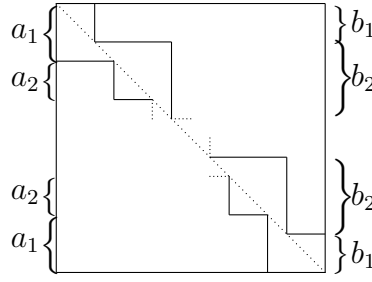
(ii) Pour toute suite $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$, soit $\tilde{\underline{a}} = (a_m, \dots, a_1)$. Les deux sous-algèbres biparaboliques $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ et $\mathfrak{q}_n(\tilde{\underline{b}} \mid \tilde{\underline{a}})$ de $\mathfrak{sp}(2n)$ sont conjuguées par $Sp(2n)$.

(iii) $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b}) = \mathfrak{sp}(2n)$ si et seulement si $\underline{a} = \underline{b} = \emptyset$.

(iv) $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{sp}(2n)$ si et seulement si $\underline{a} = \emptyset$ ou $\underline{b} = \emptyset$.

(v) $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{sp}(2n)$ si et seulement si $\underline{a} = \emptyset$ et $\underline{b} = (\underbrace{1, \dots, 1}_n)$ ou $\underline{b} = \emptyset$ et $\underline{a} = (\underbrace{1, \dots, 1}_n)$.

(vi) $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ est constituée des matrices symplectiques, voir Figure 4.

Figure 4: les matrices de $\mathbf{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$

Theorème 6.6. [14] *Toute sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{sp}(2n)$ est quasi-réductive.*

Soient $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ deux compositions telles que $s_a := a_1 + \dots + a_m \leq n$ et $s_b := b_1 + \dots + b_t \leq n$. Soit

$$\Gamma_n(\underline{a} \mid \underline{b}) := \Gamma(a_1, \dots, a_m, 2(n - s_a), a_m, \dots, a_1 \mid b_1, \dots, b_t, 2(n - s_b), b_t, \dots, b_1),$$

on dira que $\Gamma_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ est le méandre associé à $\mathbf{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ ou méandre de $\mathbf{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$. Soient D' la droite verticale passant par le milieu des deux points numérotés n et $n + 1$ et σ la symétrie par rapport à D' , alors $\Gamma_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ est invariant par σ .

Soient $a_0 = b_0 = 0$, $I_a = \{1 \leq i \leq m; a_i \neq 1\}$ et $I_b = \{1 \leq i \leq t; b_i \neq 1\}$.

Pour tout $i \in I_a$ et $1 \leq j \leq \lfloor \frac{a_i}{2} \rfloor$, on note $\tilde{c}_{i,j} := (c_{i,j}, \sigma(c_{i,j}))$ la paire d'arcs situés au dessous de D et symétriques par rapport à D' , où $c_{i,j}$ est l'arc qui relie les deux points numérotés $a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1} + j$ et $a_0 + a_1 + \dots + a_i - j + 1$, $\sigma(c_{i,j})$ est alors l'arc qui relie les deux points numérotés $2n - (a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1} + j) + 1$ et $2n - (a_0 + a_1 + \dots + a_i - j)$.

Pour $s_a + 1 \leq j \leq n$, on note $c_{a,j}$ l'arc situé au dessous de D et reliant les deux points numérotés j et $2n - j + 1$, il est invariant par σ . Soient

$$\nabla^1 = \{\tilde{c}_{i,j}; i \in I_a, 1 \leq j \leq \lfloor \frac{a_i}{2} \rfloor\}, \quad \nabla^2 = \{c_{a,j}; s_a + 1 \leq j \leq n\}$$

et $\nabla'' = \nabla^1 \cup \nabla^2$. De même, on définit les ensembles suivants d'arcs situés au dessus de D : $\nabla^{-1} = \{\tilde{d}_{i,j}; i \in I_b, 1 \leq j \leq \lfloor \frac{b_i}{2} \rfloor\}$, l'ensemble des paires d'arcs symétriques par rapport à D' , $\nabla^{-2} = \{d_{b,j}; s_b + 1 \leq i \leq n\}$, l'ensemble d'arcs invariants par σ et $\nabla' = \nabla^{-1} \cup \nabla^{-2}$.

Soit τ la symétrie par rapport à D . Si X est un cycle (resp. segment), on distingue trois cas :

- $\sigma(X) \neq X$, X est appelé cycle (resp. segment) linéaire. Dans ce cas, $\sigma(X)$ est aussi un cycle (resp. segment) linéaire, $\dim(X) = \dim(\sigma(X))$ et les sommets de X sont situés d'un côté de D' . On note $\tilde{X} = (X, \sigma(X))$ la paire de cycles (resp. segments) linéaires contenant le cycle (resp. segment) linéaire X dont les sommets sont inclus dans $\{1, \dots, n\}$.
- $\sigma(X) = X$ et $\tau(X) \neq X$, X est appelé cycle (resp. segment) orthogonal.
- $\sigma(X) = X$ et $\tau(X) = X$, X est appelé cycle symplectique.

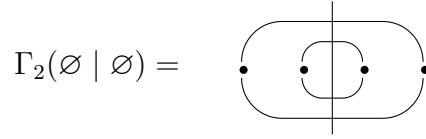
Remarque 6.7. (1) Si X est un cycle orthogonal, les deux bouts de X sont symétriques par rapport à D' .

(2) Si $n - \max(s_a, s_b) = 0$, on n'a aucun cycle symplectique et si $n - \max(s_a, s_b) \neq 0$, on a un seul cycle symplectique maximal de dimension $2(n - \max(s_a, s_b))$.

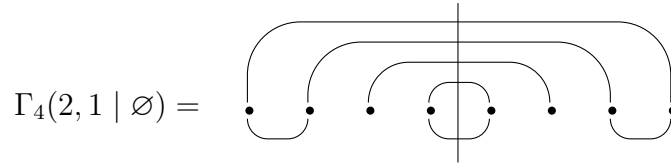
Remarque 6.8. (1) Le méandre de $\mathfrak{sp}(2n)$ contient exactement n cycles symplectiques dont un unique cycle maximal de dimension $2n$.

(2) Le méandre d'une sous algèbre parabolique $\mathfrak{q}_n(\underline{a}, \emptyset)$ de $\mathfrak{sp}(2n)$, où $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$, contient m cycles maximaux orthogonaux de dimensions respectives $a_1, \dots, a_m$ et, éventuellement, un cycle maximal symplectique de dimension $2(n - s_a)$.

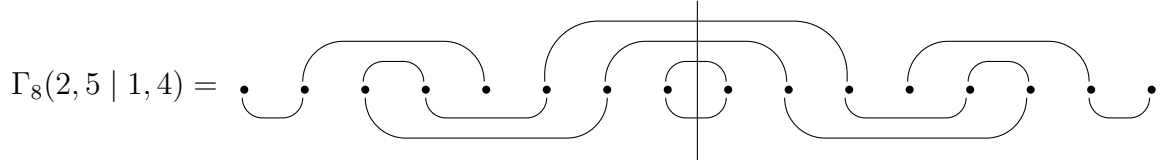
Exemple 6.9. Soit $\mathfrak{q}_2(\emptyset \mid \emptyset) = \mathfrak{sp}(4)$, alors $\Gamma_2(\emptyset \mid \emptyset)$ est un cycle central symplectique de dimension 4.



Exemple 6.10. Soit $\mathfrak{q}_4(2, 1 \mid \emptyset)$ une sous algèbre parabolique de $\mathfrak{sp}(8)$, alors $\Gamma_4(\emptyset \mid 2, 1)$ contient deux cycles centraux orthogonaux de dimension 1 et 2, et un cycle central symplectique de dimension 2.



Exemple 6.11. Soit $\mathfrak{q}_8(2, 5 \mid 1, 4) \subset \mathfrak{sp}(16)$, alors $\Gamma_8(2, 5 \mid 1, 4)$ contient une paire de cycles linéaires de dimension 1, un cycle central orthogonal de dimension 2 et un cycle central symplectique de dimension 2.



Dans toute la suite, on désigne par $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{sp}(2n)$ constituées des matrices diagonales, c'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sp}(2n)$. Soient $(e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2n}$ la base canonique de $\mathfrak{gl}(2n)$, Δ le système de racine de $\mathfrak{sp}(2n)$ relativement à $\mathfrak{h}$ et $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, où $\alpha_i = e_{i,i}^* - e_{i+1,i+1}^*$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$ et $\alpha_n = 2e_{n,n}^*$, la base de Δ de telle sorte que la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_\pi^+$ correspond à la sous-algèbre des matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{sp}(2n)$.

Si $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ est une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{sp}(2n)$, il existe alors $\pi', \pi'' \subset \pi$ telles que $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$. Toute racine $\beta \in \Delta$ s'écrit sous la forme $\beta = k_{1,\beta}\alpha_1 + \dots + k_{n,\beta}\alpha_n$, avec $k_{i,\beta} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Supposons qu'il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $\alpha_i \in \pi' \setminus \pi''$, alors $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_i(0) \oplus \mathfrak{q}_i(1) \oplus \mathfrak{q}_i(2)$ où $\mathfrak{q}_i(0) = \mathfrak{h} \oplus \langle X_\beta \in \mathfrak{q} \mid k_{i,\beta} = 0 \rangle$, $\mathfrak{q}_i(1) = \langle X_\beta \in \mathfrak{q} \mid k_{i,\beta} = 1 \rangle$ et $\mathfrak{q}_i(2) = \langle X_\beta \in \mathfrak{q} \mid k_{i,\beta} = 2 \rangle$. De plus la décomposition $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_i(0) \oplus \mathfrak{q}_i(1) \oplus \mathfrak{q}_i(2)$ est une trois graduation de $\mathfrak{q}$.

Lemme 6.12. (Avec les notations précédentes.) Soient $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{sp}(2n)$, où $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_t)$ et $\pi', \pi'' \subset \pi$ telles que $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b}) = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$, on a :

(1) L'ensemble ∇' (resp. ∇'') est en bijection avec $\Omega_{\pi'}$ (resp. $\Omega_{\pi''}$).

(2) $k_{\pi'} = n - s_b + \sum_{1 \leq i \leq t} [\frac{b_i}{2}]$ et $k_{\pi''} = n - s_a + \sum_{1 \leq i \leq m} [\frac{a_i}{2}]$.

Preuve. (1) Pour tout $i \in I_b$, soient $b'_i = b_1 + \dots + b_i$, $\pi'_i = \{\alpha_{b'_{i-1}+1}, \dots, \alpha_{b'_i-1}\}$ et $\pi'_b = \{\alpha_{s_b+1}, \dots, \alpha_n\}$. Pour tout $i \in I_a$, soient $a'_i = a_1 + \dots + a_i$, $\pi''_i = \{\alpha_{a'_{i-1}+1}, \dots, \alpha_{a'_i-1}\}$ et $\pi''_a = \{\alpha_{s_a+1}, \dots, \alpha_n\}$. Soit par convention, $a'_0 = b'_0 = 0$. Alors, on a :

$$(i) \quad \pi' = \bigcup_{i \in I_b} \pi'_i \cup \pi'_b \text{ et } \pi'' = \bigcup_{i \in I_a} \pi''_i \cup \pi''_a.$$

$$(ii) \quad \Omega_{\pi'} = \bigcup_{i \in I_b} \Omega_{\pi'_i} \cup \Omega_{\pi'_b} = \bigcup_{i \in I_b} \{\xi_{i,j} = \alpha_{b'_{i-1}+j} + \dots + \alpha_{b'_i-j} ; 1 \leq j \leq [\frac{b_i}{2}]\} \cup \\ \cup \{\xi_{b,j} = 2\alpha_j + \dots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n ; s_b + 1 \leq j \leq n\}.$$

$$(iii) \quad \Omega_{\pi''} = \bigcup_{i \in I_a} \Omega_{\pi''_i} \cup \Omega_{\pi''_a} = \bigcup_{i \in I_a} \{\zeta_{i,j} = \alpha_{a'_{i-1}+j} + \dots + \alpha_{a'_i-j} ; \\ 1 \leq j \leq [\frac{a_i}{2}]\} \cup \{\zeta_{a,j} = 2\alpha_j + \dots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n ; s_a + 1 \leq j \leq n\}.$$

On en déduit alors que :

$$\text{l'application } \psi' \text{ de } \nabla' \text{ dans } \Omega_{\pi'} : \begin{cases} \tilde{d}_{i,j} \mapsto \xi_{i,j}, & i \in I_b, 1 \leq j \leq [\frac{b_i}{2}] \\ d_{b,j} \mapsto \xi_{b,j}, & s_b + 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

$$\text{et l'application } \psi'' \text{ de } \nabla'' \text{ dans } \Omega_{\pi''} : \begin{cases} \tilde{c}_{i,j} \mapsto \zeta_{i,j}, & i \in I_a, 1 \leq j \leq [\frac{a_i}{2}] \\ c_{a,j} \mapsto \zeta_{a,j}, & s_a + 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

sont deux bijections.

(2) Par définition, on a :

$$\text{card}(\nabla') = \text{card}(\nabla^{-2}) + \text{card}(\nabla^{-1}) = n - s_b + \sum_{1 \leq i \leq t, b_i \neq 1} [\frac{b_i}{2}] = n - s_b + \sum_{1 \leq i \leq t} [\frac{b_i}{2}],$$

$$\text{card}(\nabla'') = \text{card}(\nabla^2) + \text{card}(\nabla^1) = n - s_a + \sum_{1 \leq i \leq m, a_i \neq 1} [\frac{a_i}{2}] = n - s_a + \sum_{1 \leq i \leq m} [\frac{a_i}{2}]$$

Le résultat découle alors de (1). ■

Soient $\mathfrak{q}_n(\underline{a}, \underline{b})$ une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{sp}(2n)$, $\pi', \pi'' \subset \pi$ tels que $\mathfrak{q}_n(\underline{a}, \underline{b}) = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ et $\Gamma_n(\underline{a}, \underline{b})$ le méandre associé. Rappelons que chaque paire de cycles linéaires $\tilde{X}$ s'écrit de la forme $\tilde{X} = (X, \sigma(X))$, où X est un cycle linéaire dont les sommets sont dans l'intervalle $[1, n]$. De plus X est maximal si et seulement si $\sigma(X)$ est maximal. On définit les ensembles suivants :

(a) $\{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_e\}$: l'ensemble des paires de cycles maximaux linéaires.

- (b) Le singleton $\{X_{e+1}\}$ constitué de l'unique cycle maximal symplectique de dimension $2(n - \max(s_a, s_b))$ si $n > \max(s_a, s_b)$, et on convient que $X_{e+1} = \emptyset$ si $n = \max(s_a, s_b)$.
- (c) $\{X_{e+2}, \dots, X_{e'}\}$: l'ensemble des cycles maximaux orthogonaux.

Pour tout $1 \leq i \leq e'$, soit r_i la dimension du cycle maximal X_i . On pose $x_1^i \leq x_1^i + r_i - 1 < x_2^i \leq x_2^i + r_i - 1 < \dots < x_{k_i}^i \leq x_{k_i}^i + r_i - 1$ les sommets de X_i .

Pour $1 \leq i \leq e$ tel que $r_i > 1$, soient A_0^i, B_0^i les arcs de $\Gamma_n(\underline{a}, \underline{b})$ qui sont les bouts du cycle X_i et $x_t^i, x_{t'}^i$ les deux sommets du cycle X_i tels que x_t^i et $x_t^i + r_i - 1$ (resp. $x_{t'}^i$ et $x_{t'}^i + r_i - 1$) soient reliés par A_0^i (resp. B_0^i). Pour tout $0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1$, soient $\tilde{A}_j^i = (A_j^i, \sigma(A_j^i)), \tilde{B}_j^i = (B_j^i, \sigma(B_j^i))$ les paires d'arcs symétriques de $\Gamma_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ où A_j^i (resp. B_j^i) est l'arc de $\Gamma_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ qui relie les points $x_t^i + j$ et $x_t^i + r_i - 1 - j$ (resp. $x_{t'}^i + j$ et $x_{t'}^i + r_i - 1 - j$),

$$\xi_j^i = \begin{cases} \psi'(\tilde{A}_j^i), & \text{si } \tilde{A}_j^i \in \nabla' \\ -\psi''(\tilde{A}_j^i), & \text{si } \tilde{A}_j^i \in \nabla'' \end{cases}, \quad \tilde{\xi}_j^i = \begin{cases} \psi'(\tilde{B}_j^i), & \text{si } \tilde{B}_j^i \in \nabla' \\ -\psi''(\tilde{B}_j^i), & \text{si } \tilde{B}_j^i \in \nabla'' \end{cases}$$

et $\Omega^i = \{\xi_j^i, \tilde{\xi}_j^i, 0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1\}$.

Pour $e+2 \leq i \leq e'$ tel que $r_i > 1$, soient $\tilde{C}_0^i = (C_0^i, \sigma(C_0^i))$ la paire d'arcs symétriques de $\Gamma_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ qui sont les bouts du cycle X_i . L'arc C_0^i relie deux sommets du cycle X_i qu'on notera x_s^i et $x_s^i + r_i - 1$. Pour tout $0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1$, soient $\tilde{C}_j^i = (C_j^i, \sigma(C_j^i))$, où C_j^i est l'arc de $\Gamma_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ qui relie les points $x_s^i + j$ et $x_s^i + r_i - 1 - j$,

$$\xi_j^i = \begin{cases} \psi'(\tilde{C}_j^i), & \text{si } \tilde{C}_j^i \in \nabla' \\ -\psi''(\tilde{C}_j^i), & \text{si } \tilde{C}_j^i \in \nabla'' \end{cases} \quad \text{et } \Omega^i = \{\xi_j^i, 0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1\}.$$

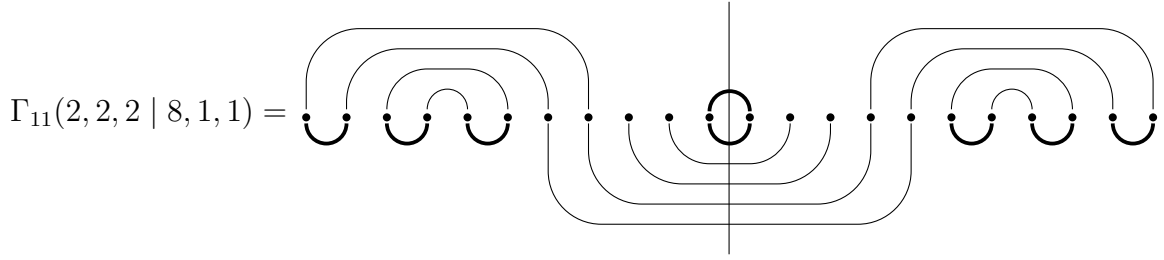
Si $r_{e+1} = 2(n - \max(s_a, s_b)) > 1$, le cycle symplectique X_{e+1} possède seulement deux sommets à savoir : les points numérotés $\max(s_a, s_b) + 1$ et $2n - \max(s_a, s_b)$. Pour tout $1 \leq j \leq \frac{r_{e+1}}{2}$, soient D_j^{e+1} (resp. $\tau(D_j^{e+1})$) l'arc de ∇' (resp. ∇'') qui relie les points numérotés $\max(s_a, s_b) + j$ et $2n - \max(s_a, s_b) - j + 1$, $\xi_j^{e+1} = \psi'(D_j^{e+1}) = \psi''(\tau(D_j^{e+1})) \in \Omega_{\pi'} \cap \Omega_{\pi''}$ et $\Omega^{e+1} = \{\xi_j^{e+1}, 0 \leq j \leq [\frac{r_{e+1}}{2}]\}$.

Pour tout $1 \leq i \leq e'$ tel que $r_i = 1$, on convient que $\Omega^i = \{\emptyset\}$. Soient

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{1 \leq i \leq e'} \Omega^i \subseteq \Omega_{\pi'} \cup (-\Omega_{\pi''}), \tilde{\Omega}_{\pi'} = \Omega_{\pi'} \setminus \bar{\Omega} \cap \Omega_{\pi'}, \tilde{\Omega}_{\pi''} = \Omega_{\pi''} \setminus (-\bar{\Omega}) \cap \Omega_{\pi''}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})} &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq e \\ 0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1}} (x_j^i X_{\xi_j^i}^* + y_j^i X_{\tilde{\xi}_j^i}^*) + \sum_{\substack{e+2 \leq i \leq e' \\ 0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1}} z_j^i X_{\xi_j^i}^* + \\ &+ \sum_{1 \leq j \leq \frac{r_{e+1}}{2}} (t_j X_{\xi_j^{e+1}}^* + t'_j X_{-\xi_j^{e+1}}^*) + \sum_{\xi \in \tilde{\Omega}_{\pi'}} a_{\xi} X_{\xi}^* + \sum_{\xi \in \tilde{\Omega}_{\pi''}} b_{\xi} X_{-\xi}^*, \\ &((x_j^i, y_j^i)_{\substack{1 \leq i \leq e \\ 0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1}}, (z_j^i)_{\substack{e+2 \leq i \leq e' \\ 0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1}}, (t_j, t'_j)_{1 \leq j \leq \frac{r_{e+1}}{2}}, (a_{\xi})_{\xi \in \tilde{\Omega}_{\pi'}}, (b_{\xi})_{\xi \in \tilde{\Omega}_{\pi''}}) \in \mathbb{C}^{k_{\pi'} + k_{\pi''}}. \end{aligned}$$

Exemple 6.13. Nous représentons les paires d'arcs $\tilde{A}_j^i$ (rep. $\tilde{B}_j^i$), les paires d'arcs $\tilde{C}_j^i$ et les paires d'arcs $(D_j^{e+1}, \tau(D_j^{e+1}))$ en gras.



Définition 6.14. On dira que $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}$ vérifie la propriété P si $a_\xi \neq 0$, $\xi \in \tilde{\Omega}_{\pi'}$ et $b_\xi \neq 0$, $\xi \in \tilde{\Omega}_{\pi''}$.

Remarque 6.15. (1) Supposons que $\mathfrak{q}_n(\underline{a} | \underline{b})$ est réductive (i.e. $\underline{a} = \underline{b}$), alors $\tilde{\Omega}_{\pi'} = \tilde{\Omega}_{\pi''} = \emptyset$ et toutes les formes $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}$ vérifient P.

(2) Supposons que $\mathfrak{q}(\underline{a} | \underline{b})$ est une sous algèbre de Borel de $\mathfrak{sp}(2n)$, alors $\bar{\Omega} = \emptyset$.

Lemme 6.16. Soit $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_n(\underline{a} | \emptyset)$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{sp}(2n)$ où $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ est une composition d'un entier inférieur ou égal à n .

(1) Supposons $a_1 < n$, alors $\mathfrak{q} = \mathfrak{gl}(a_1) \oplus \mathfrak{q}' \oplus \mathfrak{q}_{a_1}(1) \oplus \mathfrak{q}_{a_1}(2)$ où $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}_n(a_2, \dots, a_m | \emptyset)$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{sp}(2(n - a_1))$. Soit φ le prolongement de $\varphi_{n,(\underline{a}|\emptyset)|_{\mathfrak{q}_{a_1}(2)}}$ par 0 sur $\mathfrak{gl}(a_1) \oplus \mathfrak{q}' \oplus \mathfrak{q}_{a_1}(1)$. Supposons $\varphi_{n,(\underline{a}|\emptyset)}$ vérifie P, on a :

- (i) $\mathfrak{q}_\varphi \simeq \mathfrak{so}(a_1) \oplus \mathfrak{q}'$.
- (ii) $\varphi_{n,(\underline{a}|\emptyset)|_{\mathfrak{q}_\varphi}} = \varphi_{\mathfrak{so}(a_1)} \oplus \varphi_{n-a_1,(a_2,\dots,a_m|\emptyset)}$, où $\varphi_{\mathfrak{so}(a_1)}$ est la forme définie au (2) du Lemme 3.9.
- (iii) $\varphi_{\mathfrak{so}(a_1)}$ et $\varphi_{n-a_1,(a_2,\dots,a_m|\emptyset)}$ vérifient P.

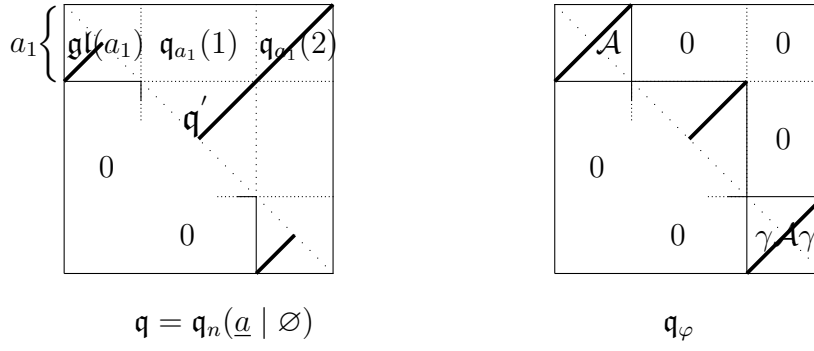
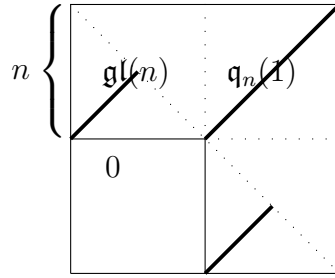
(2) Supposons $a_1 = n$, alors $\mathfrak{q} = \mathfrak{gl}(a_1) \oplus \mathfrak{q}_{a_1}(1)$. Soit φ le prolongement de $\varphi_{n,(a_1|\emptyset)|_{\mathfrak{q}_{a_1}(1)}}$ par 0 sur $\mathfrak{gl}(a_1)$. Supposons $\varphi_{n,(a_1|\emptyset)}$ vérifie P, on a :

- (i) $\mathfrak{q}_\varphi \simeq \mathfrak{so}(a_1)$;
- (ii) $\varphi_{n,(a_1|\emptyset)|_{\mathfrak{q}_\varphi}} = \varphi_{\mathfrak{so}(a_1)}$;
- (iii) $\varphi_{\mathfrak{so}(a_1)}$ vérifie P.

Preuve. (1) On montre d'abord, d'une manière analogue à celle du cas $\mathfrak{gl}(n)$, que si $\varphi_{n,(\underline{a}|\emptyset)}$ vérifie P, alors l'orbite de φ dans $\mathfrak{q}_{a_1}(2)^*$ est ouverte (voir 1), Lemme 5.11).

(1-i) Voir Figure 5 où la forme $\varphi_{n,(\underline{a}|\emptyset)}$ est représentée en gras.

(1-ii) et (1-iii) Supposons $a_1 > 1$. Compte tenu de la Remarque 6.8, le méandre $\Gamma_n(\underline{a} | \emptyset)$ de $\mathfrak{q}_n(\underline{a} | \emptyset)$ est constitué d'un cycle maximal orthogonal X de dimension a_1 dont les sommets sont $1 < a_1 < 2n - a_1 + 1 < 2n$ et du méandre $\Gamma_{n-a_1}(a_2, \dots, a_m | \emptyset)$ de $\mathfrak{q}_{n-a_1}(a_2, \dots, a_m | \emptyset)$, de plus l'arc C_1 qui relie les sommets 1 et a_1 et l'arc $\sigma(C_1)$ sont les deux bouts de X .

Figure 5: Réduction de $\mathbf{q}_n(a_1, a_2, \dots, a_r \mid \emptyset)$ Figure 6: $\mathbf{q}_n(n \mid \emptyset)$

Soient $\tilde{C}_i := (C_i, \sigma(C_i))$ la paire d'arcs symétriques de $\Gamma_n(\underline{a} \mid \emptyset)$ où C_i est l'arc qui relie les deux sommets i et $a_1 - i + 1$, $1 \leq i \leq \lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor$, et A_i l'arc qui relie les deux sommets i et $2n - i + 1$, $1 \leq i \leq a_1$.

Soient ψ' et ψ'' les deux bijections définies dans la démonstration du Lemme 6.12, $\xi_i = -\psi''(\tilde{C}_i)$, $1 \leq i \leq \lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor$, $\zeta_i = \psi'(A_i)$, $1 \leq i \leq a_1$, et $(e_{i,j}^*)_{1 \leq i,j \leq 2n}$ la base duale de la base canonique de $\mathfrak{gl}(2n)$. On vérifie que $X_{\xi_i}^* = e_{a_1-i+1,i}^* - e_{2n-i,2n-a_1+i-1}^*$, $1 \leq i \leq \lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor$ et $X_{\zeta_i}^* = e_{i,2n-i}^*$, $1 \leq i \leq a_1$. De plus, on a

$$\varphi_{n,(\underline{a}|\emptyset)} = \sum_{1 \leq i \leq \lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor} z_i X_{\xi_i}^* + \sum_{1 \leq i \leq a_1} t_i X_{\zeta_i}^* + \varphi_{n-a_1,(a_2,\dots,a_m|\emptyset)},$$

$(z_i)_{1 \leq i \leq \lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor} \in \mathbb{C}^{\lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor}$, $(t_i)_{1 \leq i \leq a_1} \in \mathbb{C}^{a_1}$, et $\varphi_{n-a_1,(a_2,\dots,a_m|\emptyset)} \in (\mathbf{q}')^*$. D'autre part, la restriction de $\sum_{1 \leq i \leq \lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor} z_i X_{\xi_i}^*$ à $\mathbf{q}_\varphi$ est égale à

$$\sum_{1 \leq i \leq \lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor} z_i (e_{a_1-i+1,i}^* - e_{i,a_1-i+1}^*) = \varphi_{\mathfrak{so}(a_1)}$$

et la restriction de $\sum_{1 \leq i \leq a_1} t_i X_{\zeta_i}^*$ à $\mathbf{q}_\varphi$ est nulle. Comme les arcs C_1 et $\sigma(C_1)$ sont les deux bouts du cycle X , on voit alors que $\varphi_{n,(\underline{a}|\emptyset)}$ vérifie P si et seulement si $t_i \neq 0$, $1 \leq i \leq a_1$ et de plus, $\varphi_{n-a_1,(a_2,\dots,a_m|\emptyset)}$ vérifie P . En particulier, si $\varphi_{n,(\underline{a}|\emptyset)}$ vérifie P , alors $\varphi_{n-a_1,(a_2,\dots,a_m|\emptyset)}$ vérifie P . D'où le résultat.

Supposons $a_1 = 1$, alors le méandre $\Gamma_n(\underline{a} \mid \emptyset)$ de la sous-algèbre $\mathbf{q}_n(\underline{a} \mid \emptyset)$ est constitué d'un arc A reliant les deux sommets 1 et $2n$ et du méandre $\Gamma_{n-a_1}(a_2, \dots, a_m \mid \emptyset)$

de $\mathfrak{q}_{n-a_1}(a_2, \dots, a_m \mid \emptyset)$. Soit $\zeta = \psi'(A)$, alors $\varphi_{n,(\underline{a}|\emptyset)} = tX_\zeta^* + \varphi_{n-a_1,(a_2,\dots,a_m|\emptyset)}$, $t \in \mathbb{C}$ et la restriction de tX_ζ^* à $\mathfrak{q}_\varphi$ est nulle. D'où le résultat.

(2) De même, puisque $\varphi_{n,(a_1|\emptyset)}$ vérifie P , l'orbite de φ dans $\mathfrak{q}_{a_1}(1)^*$ est alors ouverte.

(2-i) Voir figure 6 où la forme $\varphi_{n,(a_1|\emptyset)}$ est représentée en gras.

(2-ii) et (2-iii) Dans ce cas, le méandre $\Gamma_n(a_1 \mid \emptyset)$ de $\mathfrak{q}_n(a_1 \mid \emptyset)$ est un cycle maximal orthogonal X de dimension a_1 dont les sommets sont $1 < a_1 < a_1 + 1 < 2a_1$. Le résultat découle de 1). ■

Theorème 6.17. *Avec les notations précédentes, on a :*

- (1) $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}$ est de type réductif dans $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})^*$ si et seulement si :
 $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}$ vérifie P , ainsi que pour tous $1 \leq i \leq e$, $0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1$, x_j^i et y_j^i vérifient la condition suivante : $x_j^i = 0 \iff y_j^i = 0$ et pour tous $1 \leq j \leq \frac{r_{e+2}}{2}$, t_j et t'_j vérifient la condition suivante : $t_j = 0 \iff t'_j = 0$.
- (2) $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}$ est de type réductif et unipotent dans $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})^*$ si et seulement si :
 $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}$ vérifie P , ainsi que $x_j^i = y_j^i = 0$, $1 \leq i \leq e$, $0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1$, $z_j^i = 0$, $e+2 \leq i \leq e'$, $0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1$ et $t_j = t'_j = 0$, $1 \leq j \leq [\frac{r_{e+1}}{2}]$. On notera une telle forme par $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}^0$.
- (3) $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}$ est u-équivalente à $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}^0$ si et seulement si elle vérifie P .
- (4) $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}$ est une forme fortement régulière dans $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})^*$ si et seulement si :
 $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}$ vérifie P , ainsi que $x_j^i \neq 0$, $y_j^i \neq 0$, $0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1$ et
 $\prod_{0 \leq j < j' \leq [\frac{r_i}{2}] - 1} (x_j^i y_{j'}^i - x_{j'}^i y_j^i) \neq 0$, $1 \leq i \leq e$, $t_j \neq 0$, $t'_j \neq 0$, $1 \leq j \leq \frac{r_{e+1}}{2}$ et
 $\prod_{1 \leq j < j' \leq \frac{r_{e+1}}{2} - 1} (t_j t'_{j'} - t_{j'} t'_j) \neq 0$, $\prod_{0 \leq j < j' \leq [\frac{r_i}{2}] - 1} ((z_j^i)^2 - (z_{j'}^i)^2) \neq 0$, $e+2 \leq i \leq e'$
et de plus, si r_i est impair, $z_j^i \neq 0$, $0 \leq j \leq [\frac{r_i}{2}] - 1$.

Preuve. Supposons $\underline{a} \neq \emptyset$ et $\underline{b} \neq \emptyset$, d'une manière analogue à celle du cas $\mathfrak{gl}(n)$, on peut supposer que $a_1 < b_1$ et que $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}$ vérifie P . Alors $\mathfrak{q}_{a_1}(2) = 0$ et $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b}) = \mathfrak{q}_{a_1}(0) \oplus \mathfrak{q}_{a_1}(1)$. Soit φ le prolongement de $(\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})})|_{\mathfrak{q}_{a_1}(1)}$ par 0 sur $\mathfrak{q}_{a_1}(0)$, alors $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})_\varphi$ est isomorphe à la sous-algèbre $\mathfrak{q}_{n-a_1}(\underline{a}' \mid \underline{b}')$ où :

$$\underline{a}' = (a_2, \dots, a_m) \text{ et } \underline{b}' = (b_1 - 2a_1, a_1, b_2, \dots, b_t) \text{ si } a_1 \leq [\frac{b_1}{2}];$$

$$\underline{a}' = (2a_1 - b_1, a_2, \dots, a_m) \text{ et } \underline{b}' = (a_1, b_2, \dots, b_t) \text{ si } a_1 > [\frac{b_1}{2}].$$

D'après le Lemme 5.11 et le Lemme 6.16, cette réduction laisse stable la forme $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}$, autrement dit, $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}|_{\mathfrak{q}_{n-a_1}(\underline{a}'|\underline{b}')} = \varphi_{n-a_1,(\underline{a}'|\underline{b}')}$ et $\varphi_{n-a_1,(\underline{a}'|\underline{b}')}$ vérifie P . En appliquant le Lemme 2.17 avec $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_{a_1}(1)$, on déduit que $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})} \in \mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})_{fr}^*$ (resp. $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})_u^*$) si et seulement si $\varphi_{n-a_1,(\underline{a}'|\underline{b}')} \in \mathfrak{q}_{n-a_1}(\underline{a}' \mid \underline{b}')_{fr}^*$ (resp. $\mathfrak{q}_{n-a_1}(\underline{a}' \mid \underline{b}')_u^*$).

Supposons $\underline{a} = \emptyset$ ou $\underline{b} = \emptyset$, on applique la réduction du Lemme 6.16.

D'autre part, cette réduction agit sur $\Gamma_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ de la manière suivante (voir [5]):

- * Chaque cycle maximal linéaire de dimension r_i se réduit au méandre de $\mathfrak{gl}(r_i)$.
- * Chaque cycle maximal orthogonal de dimension r_i se réduit au méandre de $\mathfrak{so}(r_i)$.
- * Le cycle maximal symplectique reste stable.

La sous algèbre $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ se réduit à $\prod_{i=1}^e \mathfrak{gl}(r_i) \oplus \mathfrak{sp}(r_{e+1}) \oplus \prod_{i=e+2}^{e'} \mathfrak{so}(r_i)$ et la forme $\varphi_{n,(\underline{a}|\underline{b})}$ se réduit à $\phi := \bigoplus_{i=1}^e \varphi_{\mathfrak{gl}(r_i)} + \varphi_{\mathfrak{sp}(r_{e+1})} + \bigoplus_{i=e+2}^{e'} \varphi_{\mathfrak{so}(r_i)}$, où $\varphi_{\mathfrak{gl}(r_i)}$, $\varphi_{\mathfrak{sp}(r_{e+1})}$ et $\varphi_{\mathfrak{so}(r_i)}$ sont les formes définies au Lemme 3.9. Le résultat découle du Lemme 2.17 et du Lemme 2.19 d'une manière analogue à celle du cas $\mathfrak{gl}(n)$. ■

On considère les plongements de $\mathfrak{gl}(r_i)$, $\mathfrak{so}(r_i)$ dans $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ induits par la procédure de réduction du méandre. De ce qui précède, on déduit le théorème suivant :

Théorème 6.18. (1) $\mathfrak{J}_n(\underline{a} \mid \underline{b}) := \prod_{i=1}^e \mathfrak{J}_{\mathfrak{gl}(r_i)} \oplus \mathfrak{J}_{\mathfrak{sp}(r_{e+1})} \oplus \prod_{i=e+2}^{e'} \mathfrak{J}_{\mathfrak{so}(r_i)}$ est une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$.

$$(2) \quad \chi(\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})) = \sum_{1 \leq i \leq e} r_i + \sum_{e+2 \leq i \leq e'} \left\lfloor \frac{r_i}{2} \right\rfloor + (n - \max(s_a, s_b)).$$

$$(3) \quad \mathfrak{r}_n(\underline{a} \mid \underline{b}) := \prod_{i=1}^e \mathfrak{gl}(r_i) \oplus \mathfrak{sp}(2n - 2\max(s_a, s_b)) \oplus \prod_{i=e+2}^{e'} \mathfrak{so}(r_i) \text{ est une sous-algèbre réductive canonique de } \mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b}).$$

Remarque 6.19. Par définition de la dimension d'un cycle maximal, on a:

$$(1) \quad \sum_{1 \leq i \leq e} r_i = \frac{1}{2}(2 \times \text{nombre de cycles linéaires} + \text{nombre de segments linéaires}).$$

$$(2) \quad \sum_{e+2 \leq i \leq e'} \left\lfloor \frac{r_i}{2} \right\rfloor = \text{nombre de cycles orthogonaux}.$$

$$(3) \quad n - \max(s_a, s_b) = \text{nombre de cycles symplectiques}.$$

Compte tenu du Théorème 6.18, nous retrouvons alors le théorème suivant.

Théorème 6.20. [15] (Théorème 3.2)

$$\chi(\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})) = \text{nombre de cycles} + \frac{1}{2} \text{nombre des segments linéaires}.$$

Exemple 6.21. Soit $\mathfrak{q}_{11}(2, 2, 2 \mid 8, 1, 1) \subset \mathfrak{sp}(22)$, alors:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}(2, 2, 2 \mid 8, 1, 1) &= \text{Diagram 1} \\ \Gamma_9(2, 2 \mid 4, 2, 1, 1) &= \text{Diagram 2} \\ \Gamma_7(2 \mid 2, 2, 1, 1) &= \text{Diagram 3} \end{aligned}$$

$\chi(\mathfrak{q}_{11}(2, 2, 2 \mid 8, 1, 1)) = 4.$

La forme linéaire $\varphi_{11,(2,2,2|8,1,1)}$, restriction à $\mathfrak{q}_{11}(2, 2, 2 | 8, 1, 1)$ de la forme linéaire

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} (e_{2i-1,2i}^* - e_{23-2i,24-2i}^*) + \sum_{7 \leq i \leq 11} (e_{i,23-i}^*) + \sum_{1 \leq i \leq 4} (e_{9-i,i}^* + e_{23-i,14+i}^*) + e_{12,11}^*$$

est fortement régulière. Elle est u-équivalente à la forme de type réductif et unipotent $\varphi_{11,(2,2,2|8,1,1)}^0$, restriction à $\mathfrak{q}_{11}(2, 2, 2 | 8, 1, 1)$ de la forme linéaire

$$\sum_{7 \leq i \leq 10} (e_{i,23-i}^*) + \sum_{1 \leq i \leq 4} (e_{9-i,i}^* + e_{23-i,14+i}^*).$$

Considérons les matrices :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{A} \end{pmatrix} \quad (*)$$

où $A \in \mathfrak{so}(2)$, $B \in \mathfrak{gl}(2)$ et $C \in \mathfrak{sp}(2)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$ constituée des matrices de la forme $(*)$ est une sous-algèbre réductive canonique de $\mathfrak{q}_{11}(2, 2, 2 | 8, 1, 1)$.

Corollaire 6.22. Soient $\mathfrak{q}_n(\underline{a} | \emptyset)$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{sp}(2n)$, où $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$, on a :

(1) (i) $\mathfrak{J}_n(\underline{a} | \emptyset) := \mathfrak{J}_{\mathfrak{so}(a_1)} \oplus \dots \oplus \mathfrak{J}_{\mathfrak{so}(a_m)} \oplus \mathfrak{J}_{\mathfrak{sp}(2(n-s_a))}$ est une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{p}$.

(ii) $\chi(\mathfrak{q}_n(\underline{a} | \emptyset)) = n - s_a + \sum_{1 \leq i \leq m} [\frac{a_i}{2}]$

(2) (i) Soit $\pi_1 \subset \pi$ le sous-système de type C_{n-s_a} . La forme $\phi := \sum_{\xi \in \Omega_\pi \setminus \Omega_{\pi_1}} \lambda_\xi X_\xi^*$ est de type réductif et unipotent dans $\mathfrak{q}_n(\underline{a} | \emptyset)^*$ si et seulement si nous avons $(\lambda_\xi)_{\xi \in \Omega_\pi \setminus \Omega_{\pi_1}} \in (\mathbb{C}^\times)^{k_\pi - k_{\pi_1}}$.

(ii) $\mathfrak{r}_n(\underline{a} | \emptyset) = \mathfrak{so}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{so}(a_m) \oplus \mathfrak{sp}(2(n-s_a))$ est une sous-algèbre réductive canonique de $\mathfrak{q}_n(\underline{a} | \emptyset)$.

Preuve. Remarquons que $\Gamma_n(\underline{a} | \emptyset)$ contient seulement $\sum_{1 \leq i \leq m} [\frac{a_i}{2}]$ cycles orthogonaux et $n - s_a$ cycles symplectiques. De plus, dans ce cas, on a $\pi' = \pi$, $\tilde{\Omega}_{\pi'} = \Omega_\pi \setminus \Omega_{\pi_1}$ et $\tilde{\Omega}_{\pi''} = \emptyset$. Le résultat se déduit alors du Théorème 6.17 et du Théorème 6.18. ■

Exemple 6.23. On reprend l'exemple 6.10, soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_4(2, 1 \mid \emptyset)$, on a :

$$\Gamma_4(2, 1 \mid \emptyset) = \begin{array}{c} \text{Diagram of a meander with 8 points and 4 arcs. The arcs connect (1,2), (2,3), (3,4), and (4,5) in a nested fashion, with a vertical line passing through the middle.} \end{array}, \quad \chi(\mathfrak{p}) = 2.$$

Une forme fortement régulière de $\mathfrak{p}^*$ est donnée par:

$$\varphi_{4,(2,1|\emptyset)} = (e_{1,2}^* - e_{7,8}^* + e_{4,5}^* + e_{8,1}^* + e_{7,2}^* + e_{6,3}^* + e_{5,4}^*)|_{\mathfrak{p}}.$$

Une forme fortement de type réductif et unipotent de $\mathfrak{p}^*$ est donnée par:

$$\varphi_{4,(2,1|\emptyset)}^0 = (e_{8,1}^* + e_{7,2}^* + e_{6,3}^*)|_{\mathfrak{p}}.$$

$$\mathfrak{p}_{\varphi_{4,(2,1|\emptyset)}} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}; \quad \{a, b\} \subset \mathbb{C}^2$$

$$\mathfrak{p}_{\varphi_{4,(2,1|\emptyset)}^0} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}; \quad \{a, b, c\} \subset \mathbb{C}^3$$

Dans ce paragraphe, nous redémontrons le Théorème 3.7 dans le cas $\mathfrak{sp}(2n)$.

Soit $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{sp}(2n)$ et soient $\pi', \pi'' \subset \pi$, telles que $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b}) = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$. Comme dans la démonstration du Théorème 3.7 dans le cas $\mathfrak{sl}(n)$ au numéro 5, on pose

$$k^{imp} = |\{1 \leq i \leq m : a_i \text{ est impair}\}| + |\{1 \leq j \leq t : b_j \text{ est impair}\}|.$$

On pose ensuite

$$k_1^{imp} = |\{1 \leq i \leq e : r_i \text{ est impair}\}| \quad \text{et} \quad k_2^{imp} = |\{e+2 \leq i \leq e' : r_i \text{ est impair}\}|.$$

On a: Le nombre de segments linéaires est égal à $2k_1^{imp}$. Le nombre de segments orthogonaux est égal à k_2^{imp} . D'une manière analogue à celle du cas $\mathfrak{gl}(n)$, on montre que le nombre de segments du méandre $\Gamma_n(a_1, \dots, a_m \mid b_1, \dots, b_t)$ est égal à k^{imp} .

D'où: $k^{imp} = 2k_1^{imp} + k_2^{imp}$, et

$$k_{\pi'} + k_{\pi''} = \sum_{1 \leq j \leq t} \left[\frac{b_j}{2} \right] + n - s_b + \sum_{1 \leq i \leq m} \left[\frac{a_i}{2} \right] + n - s_a = 2n - \frac{1}{2}(s_a + s_b) - \frac{1}{2}k^{imp}$$

D'autre part, on a:

$$\sum_{e+2 \leq i \leq e'} r_i = |s_b - s_a|$$

Comme dans le cas $\mathfrak{gl}(n)$, le sous-espace $\cap_{\xi \in \Omega_{\pi'} \cup \Omega_{\pi''}} \ker(\xi)$ est défini par les paires des cycles (resp. segments) linéaires. D'où

$$\dim(E_{\pi', \pi''}) = n - \sum_{i=1}^e \left[\frac{r_i + 1}{2} \right]$$

Par suite, on a

$$n - \dim(E_{\pi', \pi''}) + k_{\pi'} + k_{\pi''} - \dim(E_{\pi', \pi''}) = 2 \sum_{i=1}^e \left[\frac{r_i + 1}{2} \right] + n - \frac{1}{2}(s_a + s_b) - \frac{1}{2}k^{imp}$$

Or,

$$2 \sum_{i=1}^e \left[\frac{r_i + 1}{2} \right] = \sum_{i=1}^e r_i + k_1^{imp}$$

et

$$\frac{1}{2}(s_a + s_b) = \max(s_b, s_a) - \frac{1}{2}|s_b - s_a|.$$

Enfin:

$$\begin{aligned} n - \dim(E_{\pi', \pi''}) + k_{\pi'} + k_{\pi''} - \dim(E_{\pi', \pi''}) &= \\ &= \sum_{i=1}^e r_i + n - \max(s_b, s_a) + \sum_{i=e+2}^{e'} \frac{r_i}{2} - \frac{1}{2}k_2^{imp} \\ &= \sum_{i=1}^e r_i + n - \max(s_b, s_a) + \sum_{i=e+2}^{e'} \left[\frac{r_i}{2} \right] = \chi(\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})). \end{aligned}$$

Corollaire 6.24. *La sous-algèbre $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ de $\mathfrak{sp}(2n)$ est une algèbre de Frobenius si et seulement si $\Gamma_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ ne contient que des segments orthogonaux. En particulier une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{sp}(2n)$ est de Frobenius si et seulement si c'est une sous-algèbre de Borel.*

Corollaire 6.25. (1) *Supposons que $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b})$ est une algèbre de Frobenius, alors $\max(s_a, s_b) = n$.*

(2) *Supposons que $\mathfrak{q}_n(\underline{a} \mid \underline{b}) = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ est une algèbre de Frobenius, alors:*

$\varphi_{n, (\underline{a} \mid \underline{b})} = \sum_{\xi \in \Omega_{\pi'}} \lambda_{\xi} X_{\xi}^* + \sum_{\xi \in \Omega_{\pi''}} \mu_{\xi} X_{-\xi}^*$ est régulière, donc fortement régulière et de type réductif et unipotent de $\mathfrak{q}(\underline{a} \mid \underline{b})^*$ si et seulement si $\lambda_{\xi} \neq 0$, $\xi \in \Omega_{\pi'}$ et $\mu_{\xi} \neq 0$, $\xi \in \Omega_{\pi''}$.

References

- [1] R. W. Carter: *Simple Groups of Lie type*, reprint of the 1972 original, Wiley & Sons, New York (1989).
- [2] V. Coll, C. Magnant, M. Hyatt: *Symplectic meanders*, Comm. Algebra 45 (2017) 4717–4729.

- [3] V. Dergachev, A. A. Kirillov: *Index of Lie algebras of seaweed type*, J. Lie Theory 10 (2010) 331–343.
- [4] N. Djebali: *Sous-groupes réductifs canoniques des sous-groupes biparaboliques de $SO(n, C)$ ou de $SO(p, q)$ dont l'algèbre de Lie est quasi-réductive*, J. Lie Theory 28 (2018) 434–477.
- [5] N. Djebali: *Sous-groupes réductifs canoniques des sous-groupes biparaboliques réels*, Bull. Sci. Math., à paraître.
- [6] M. Duflo: *Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques*, Acta. Math. 149 (1982) 153–213.
- [7] M. Duflo, M. S. Khalgui, P. Torasso: *Algèbres de Lie quasi-réductives*, Transform. Groups 17 (2012) 417–470.
- [8] M. Duflo, M. Vergne: *Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B 268 (1969) A583–A585.
- [9] A. Joseph: *A preparation theorem for the prime spectrum of a semi-simple Lie algebra*, J. Algebra 48 (1977) 241–289.
- [10] A. Joseph: *On semi-invariants and index for biparabolic (seaweed) algebras I*, J. Algebra 305 (2006) 487–515.
- [11] M. S. Khalgui, P. Torasso: *Formule de Poisson-Plancherel pour un groupe presque algébrique réel. I: Transformée de Fourier d'intégrales orbitales*, J. Funct. Anal. 116 (1993) 359–440.
- [12] A. Moreau, O. Yakimova: *Coadjoint orbits of reductive type of parabolic and seaweed Lie subalgebras*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2012) 4475–4519.
- [13] D. I. Panyushev: *Inductive formulas for the index of seaweed Lie algebras*, Mosc. Math. J. 1 (2001) 221–241, 303.
- [14] D. I. Panyushev: *An extension of Rais' theorem and seaweed subalgebras of simple Lie algebras*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005) 693–715.
- [15] D. I. Panyushev, O. Yakimova: *On seaweed subalgebras and Meander graphs in type C*, Pacific J. Math. 285 (2016) 485–499.
- [16] D. I. Panyushev, O. Yakimova: *On seaweed subalgebras and Meander graphs in type D*, J. de l'Algèbre Pure et Appliquée 222 (2018) 3414–3431.
- [17] P. Tauvel, R. Yu: *Sur l'indice de certaines algèbres de Lie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 54 (2004) 1793–1810.
- [18] P. Tauvel, R. Yu: *Lie Algebras and Algebraic groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin et al. (2005).

Meher Bouhani
 Université Tunis El-Manar
 Faculté des Sciences de Tunis
 LR11ES11 Analyse Mathématiques et
 Applications
 2092 Tunis
 Tunisie
 meher.bouhani@math.univ-poitiers.fr
 meher-bouhani01@hotmail.fr

Received February 28, 2018
 and in final form October 15, 2018