

Stabilité des Sous-Algèbres Biparaboliques des Algèbres de Lie Simples

Kais Ammari*

Communicated by M. Pevzner

Abstract. Let $\mathbb{K}$ be an algebraically closed commutative field of characteristic 0. We prove the equivalence between stability and quasi-reductivity for biparabolic subalgebras of reductive Lie algebras. Therefore, we give a positive answer to the assertion (ii) of the conjecture (5.6) of D.I. Panyushev [An extension of Raïs' theorem and seaweed subalgebras of simple Lie algebras, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005) 693–715].

Mathematics Subject Classification: 17B45, 17B20, 17 B22, 22E60.

Key Words: Simple Lie algebras, root systems, coadjoint action, stable Lie algebra, quasi-reductive Lie algebra, stable linear form, strongly regular linear form.

1. Introduction

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle. Les algèbres de Lie considérées sont de dimension finie et définies sur $\mathbb{K}$. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique et G un groupe de Lie algébrique affine connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On munit $\mathfrak{g}^*$, l'espace dual de $\mathfrak{g}$, des actions coadjointes de $\mathfrak{g}$ et de G . Étant donnée une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$, on note $\mathfrak{g}(g)$ son stabilisateur dans $\mathfrak{g}$. On identifie $\mathfrak{g}(g)/\mathfrak{z}$, où $\mathfrak{z}$ désigne le centre de $\mathfrak{g}$, avec son image dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Une algèbre de Lie est dite quasi-réductive si elle possède une forme linéaire de type réductif, c'est-à-dire dont le stabilisateur pour l'action coadjointe est, modulo le centre de l'algèbre de Lie ambiante, une algèbre de Lie réductive dont le centre est formé d'éléments semi-simples. La notion de quasi-réductivité a été introduite par Duflo dans [4] et développée dans [5] pour son importance dans la théorie des représentations. À l'exception du type A ou C , les sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie simple ne sont pas toutes quasi-réductives (voir [14] pour le cas classique et [6] pour le cas exceptionnel). Dans [5], Duflo, Khalgui et Torasso ont caractérisé les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ qui sont quasi-réductives en termes de drapeaux de sous-espaces totalement isotropes stabilisés par ces algèbres.

Dans [11] Kosmann et Sternberg ont introduit une classe d'algèbres de Lie reliée à celle des algèbres de Lie quasi-réductives: disons qu'une algèbre de Lie est stable si elle possède par définition un voisinage dans le dual dans lequel les stabilisateurs des formes linéaires (dites stables) sont tous conjugués entre eux.

*Ce travail a bénéficié du soutien des Universités de Tunis El-Manar et Poitiers, ainsi que du projet Erasmus Mundus Al-Idrisi.

D'après [5], toute algèbre de Lie quasi-réductive est stable. En revanche, il existe des algèbres de Lie stables qui ne sont pas quasi-réductives (voir [1, Exemple 2.2.9]). Les sous-algèbres biparaboliques forment une classe intéressante (incluant la classe des sous-algèbres paraboliques et de Levi) d'algèbres de Lie non réductives en général. Elles sont par définition les intersections de deux sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ dont la somme est $\mathfrak{g}$. Dans [14], Panyushev conjecture qu'une sous-algèbre biparabolique d'une algèbre de Lie réductive est stable si et seulement si elle est quasi-réductive.

Le but principal de cet article est d'achever la démonstration de cette conjecture. Celle-ci a déjà été démontrée dans de nombreux cas: pour ce qui concerne les sous-algèbres biparaboliques des algèbres de Lie simples classiques de type A , B ou C , le problème se ramène au cas des sous-algèbres paraboliques (voir [14]). Dans le cas de type D , il y a deux types de sous-algèbres biparaboliques. D'une part celles qui stabilisent une paire de drapeaux opposés de sous-espaces totalement isotropes, pour lesquelles le procédé de réduction de Panyushev ramène encore le problème au cas des sous-algèbres paraboliques. D'autre part celles qui stabilisent une paire de drapeaux croisés de sous-espaces totalement isotropes, lesquelles sont toutes quasi-réductives (voir [8] ou [15]). Dans [1], [2] et [14], on trouve une réponse positive à cette conjecture pour le cas des sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie réductive. Par conséquent et compte tenu de ce qui précède, il suffit de traiter le cas des sous-algèbres biparaboliques d'une algèbre de Lie simple exceptionnelle qui ne sont pas des paraboliques. Soit alors $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ une sous-algèbre biparabolique d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ simple exceptionnelle (voir section 2). Comme conséquence du lemme 2.6, on ramène l'étude de la stabilité des sous-algèbres biparaboliques $\mathfrak{q}$ au cas de rang (voir la définition 2.1) nul et d'indice strictement positif. Compte tenu du lemme 2.5, il nous suffit d'étudier les sous-algèbres biparaboliques $\mathfrak{q}$ vérifiant la condition (*) suivante

$$k_{\pi'} + k_{\pi''} = \text{rang}(\mathfrak{g}) + \dim(E_{\pi'} \cap E_{\pi''}), \quad k_{\pi'} + k_{\pi''} > \text{rang}(\mathfrak{g}) \text{ et } \mathcal{K}(\pi') \cap \mathcal{K}(\pi'') = \emptyset \quad (*)$$

En se basant sur le théorème 3.6, on montre que les sous-algèbres biparaboliques vérifiant la condition (*) sont quasi-réductives si et seulement si elles sont stables (voir les sections 3 et 4 ci-après). La démonstration utilise des calculs effectués par GAP4. Notons que GAP4 n'est pas adapté au calcul formel et ne permet pas le calcul du stabilisateur de formes linéaires génériques. Notons aussi que l'utilisation de GAP4 pour ce type de problèmes n'est pas nouvelle (voir par exemple [6])

2. Rappels et réduction au cas de rang nul

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}^*$ son dual. L'indice de $\mathfrak{g}$, noté $\text{ind} \mathfrak{g}$, est la dimension minimale des stabilisateurs dans $\mathfrak{g}$ d'un élément de $\mathfrak{g}^*$ pour l'action coadjointe. Il a été introduit par Dixmier dans [7] pour son importance dans la théorie des représentations et la méthode des orbites.

Rappelons qu'une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est dite fortement régulière si elle est régulière (i.e $\dim \mathfrak{g}(g) = \text{ind} \mathfrak{g}$) de sorte que l'algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{g}(g)$ est commutative et de plus l'unique facteur réductif $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{g}(g)$, qui est un tore algébrique, est de dimension maximale. L'ensemble $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ des formes fortement régulières est un ouvert de Zariski $\mathbf{G}$ -invariant non vide de $\mathfrak{g}^*$ (voir [3]).

Definition 2.1. (voir [4]) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique sur $\mathbb{K}$. On appelle rang de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ et on note $\text{rang}(\mathfrak{g})$ la dimension commune de ses sous-algèbres de Cartan-Duflo.

Dans [16], on trouve une caractérisation purement algébrique des formes linéaires stables:

Lemme 2.2. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie algébrique et f un élément de $\mathfrak{g}^*$, on a f est stable si et seulement si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(f)] \cap \mathfrak{g}(f) = \{0\}$.*

Remarque 2.3. D'après [5], si $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive, les formes linéaires régulières de type réductif sont exactement les formes linéaires fortement régulières. De plus elles sont stables. Par suite, toute algèbre de Lie quasi-réductive est stable. ■

Dans cette partie, on renvoie à [17] et [6] pour les concepts généraux utilisés.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{K}$, G son groupe adjoint, K sa forme de Killing, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, et Δ le système de racines du couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On fixe une base π de Δ (que l'on note alors Δ_π), et on désigne par Δ_π^+ (resp. Δ_π^-) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) associé. Pour toute partie π' de π , on note $\mathbb{Z}\pi'$ (resp. $\mathbb{N}\pi'$) l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (resp. dans $\mathbb{N}$) des éléments de π' . On pose

$$\Delta_{\pi'} = \Delta_\pi \cap \mathbb{Z}\pi', \quad \Delta_{\pi'}^+ = \Delta_\pi \cap \mathbb{N}\pi' = \Delta_\pi^+ \cap \Delta_{\pi'}.$$

Ainsi si π' est non vide, $\Delta_{\pi'}$ est un système de racines dont π' est une base de racines simples et $\Delta_{\pi'}^+$ est l'ensemble des racines positives correspondant. Il est clair que si π' est vide, $\Delta_{\pi'}$ est vide.

Si $\alpha \in \Delta_\pi$, $\mathfrak{g}^\alpha$ est le sous-espace radiciel associé à α . On pose

$$\mathfrak{n}^\pm = \sum_{\alpha \in \Delta_\pi^\pm} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{b}^\pm = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^\pm.$$

On désigne par h_α l'unique élément de $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ tel que $\alpha(h_\alpha) = 2$. Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on écrit $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ pour $\lambda(h_\alpha)$.

On garde les notations précédentes et on désigne par $\mathfrak{p}_{\pi'}^+$ la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{b}^+$ et les $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, $\alpha \in \pi'$. On note $\mathfrak{p}_{\pi'}^-$ la sous-algèbre parabolique opposée à $\mathfrak{p}_{\pi'}^+$, i.e. la sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{b}^- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ et les $\mathfrak{g}^\alpha$, $\alpha \in \pi'$.

Soient π', π'' deux parties de π . On note $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ l'intersection de deux sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{p}_{\pi'}^+$ et $\mathfrak{p}_{\pi''}^-$. La sous-algèbre $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ est dite sous-algèbre biparabolique associée à π' et π'' . Il est bien connu que toute sous-algèbre biparabolique est conjuguée à une des $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$.

Si $v \in \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, on note φ_v la forme linéaire sur $\mathfrak{a}$ définie par $\varphi_v(x) = K(v, x)$ pour tout $x \in \mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$, l'application $v \mapsto \varphi_v$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathfrak{q}_{\pi'', \pi'}$ sur $(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})^*$.

On fixe une base $\{h_1, \dots, h_l\}$ de $\mathfrak{h}$. Si $\alpha \in \Delta$, on désigne par X_α un élément non nul de $\mathfrak{g}^\alpha$. Alors $\{h_i; 1 \leq i \leq l\} \cup \{X_\alpha; \alpha \in \Delta\}$ est une base de $\mathfrak{g}$, dont on note $\{h_i^*; 1 \leq i \leq l\} \cup \{X_\alpha^*; \alpha \in \Delta\}$ la base duale.

Soit S une partie de π . Par récurrence sur le cardinal de S , on définit un sous-ensemble connexe, noté $\mathcal{K}(S)$, appelé Cascade de Kostant de l'ensemble des parties de S (voir par exemple [17]). On note ε_S la plus grande racine de Δ_S . Cette construction est due à Kostant (voir [12] et [13]).

Pour π' une partie de π , on note $k_{\pi'}$ le cardinal de $\mathcal{K}(\pi')$ et $\mathcal{E}_{\pi'}$ l'ensemble des racines ε_K , avec $K \in \mathcal{K}(\pi')$ (pour plus de détails, voir [2] ou [6]). On note $E_{\pi', \pi''}$ (resp. $E_{\pi'}$) le sous-espace de $\mathfrak{h}^*$ engendré par $\mathcal{E}_{\pi'} \cup \mathcal{E}_{\pi''}$ (resp. $\mathcal{E}_{\pi'}$). Ainsi, $\dim E_{\pi', \pi''} = k_{\pi'} + k_{\pi''} - \dim(E_{\pi'} \cap E_{\pi''})$.

Soit f la restriction à $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ de

$$\sum_{K \in \mathcal{K}(\pi'')} a_K X_{\varepsilon_K}^* + \sum_{L \in \mathcal{K}(\pi')} b_L X_{-\varepsilon_L}^*,$$

où les a_K et les b_L sont des scalaires non nuls. Il existe un ouvert de Zariski dans $\mathbb{C}^{\mathcal{K}(\pi'')} \times \mathbb{C}^{\mathcal{K}(\pi')}$ tel que pour $((a_K)_{K \in \mathcal{K}(\pi'')}, (b_L)_{L \in \mathcal{K}(\pi')})$ dans cet ouvert f soit régulière (c'est une conséquence de [10] et [18]). D'après [10], on a

$$\text{ind}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}) = (\text{rang}(\mathfrak{g}) - \dim E_{\pi', \pi''}) + (k_{\pi'} + k_{\pi''} - \dim E_{\pi', \pi''}). \quad (1)$$

Remarque 2.4. Comme $\dim E_{\pi', \pi''} = k_{\pi'} + k_{\pi''} - \dim(E_{\pi'} \cap E_{\pi''})$, on obtient:

$\text{ind}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}) = 0$ si et seulement si $E_{\pi'} \cap E_{\pi''} = \{0\}$ et $k_{\pi'} + k_{\pi''} = \text{rang}(\mathfrak{g})$.

Lemme 2.5. (voir [18]) Soit f comme précédemment. On suppose que f est régulière. Alors, $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}(f)$ contient une sous-algèbre commutative, formée d'éléments semi-simples, et de dimension:

$$\text{rang}(\mathfrak{g}) - \dim E_{\pi', \pi''} + \text{card}(\mathcal{K}(\pi') \cap \mathcal{K}(\pi'')).$$

Le lemme et la proposition qui suivent permettent de ramener l'étude de la stabilité des sous-algèbres biparaboliques au cas de rang nul.

Lemme 2.6. (voir [1]) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique, $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ le centralisateur de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors

$\mathfrak{g}$ est stable si et seulement si $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ est stable.

Proposition 2.7. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple, $\mathfrak{q}$ une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{q}$. On note $\mathfrak{q}^{\mathfrak{j}}$ le centralisateur de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{q}$. Alors, on a

$$\mathfrak{q}^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{z}_{\Delta^{\mathfrak{j}}} \oplus \mathfrak{q}^{\mathfrak{j}, 1},$$

où $\mathfrak{z}_{\Delta^{\mathfrak{j}}}$ est le centre de $\mathfrak{q}^{\mathfrak{j}}$ et $\mathfrak{q}^{\mathfrak{j}, 1}$ est une somme directe de sous-algèbres biparaboliques de rang nul de sous-algèbres de Lie simples de $\mathfrak{g}$.

Preuve. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{j}$ et contenue dans $\mathfrak{q}$. On a $\dim \mathfrak{j} > 0$ et $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{q}^{\mathfrak{j}} \subset \mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ et $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta, \alpha|_{\mathfrak{j}}=0} \mathfrak{g}_{\alpha})$. Il est immédiat que l'algèbre de Lie $\mathfrak{q}^{\mathfrak{j}}/\mathfrak{j}$ est de rang nul.

Soit $\mathfrak{z}_{\Delta^{\mathfrak{j}}} = \{\mathfrak{h} \cap (\bigcap_{\alpha|_{\mathfrak{j}}=0} \ker \alpha)\}$ qui n'est autre que le centre de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$. Ainsi, on a

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{z}_{\Delta^{\mathfrak{j}}} \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k,$$

où les $\mathfrak{g}_i$, pour $1 \leq i \leq k$, sont des algèbres de Lie simples puisque l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ est réductive.

Comme chacune des sous-algèbres de Lie $\mathfrak{q}^{i,1}$ et $\mathfrak{g}_i$, $1 \leq i \leq k$ est somme directe de son intersection avec $\mathfrak{h}$ et des sous-espaces radiciels sous l'action de $\mathfrak{h}$ qu'elle contient, on a $\mathfrak{q}^i = \mathfrak{z}_{\Delta^i} \oplus \mathfrak{q}^{i,1}$ avec $\mathfrak{q}^{i,1}$ somme directe des sous-algèbres biparaboliques $\mathfrak{q}_l^i = \mathfrak{q}^i \cap \mathfrak{g}_l$ des $\mathfrak{g}_l$, $1 \leq l \leq k$ qui sont de rang nul. ■

3. Stabilité des sous-algèbres biparaboliques $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type exceptionnel, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan et π une base de racines simples du système de racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ une sous-algèbre biparabolique standard de $\mathfrak{g}$, où π' et π'' sont des parties de π . Compte tenu du lemme 2.5, si $\mathfrak{q}$ est de rang nul, on a

$$k_{\pi'} + k_{\pi''} = \text{rang}(\mathfrak{g}) + \dim(E_{\pi'} \cap E_{\pi''}) \text{ et } \mathcal{K}(\pi') \cap \mathcal{K}(\pi'') = \emptyset$$

$$\text{auquel cas} \quad \text{ind}(\mathfrak{q}) = k_{\pi'} + k_{\pi''} - \text{rang}(\mathfrak{g}). \quad (2)$$

Notons bien que toute algèbre d'indice nul est une algèbre de Frobenius (donc quasi-réductive). Par suite, il nous suffit d'étudier les sous-algèbres biparaboliques vérifiant la condition (*) suivante

$$k_{\pi'} + k_{\pi''} = \text{rang}(\mathfrak{g}) + \dim(E_{\pi'} \cap E_{\pi''}), \quad k_{\pi'} + k_{\pi''} > \text{rang}(\mathfrak{g}) \text{ et } \mathcal{K}(\pi') \cap \mathcal{K}(\pi'') = \emptyset.$$

Remarque 3.1. (1) Parmi les sous-algèbres $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ qui vérifient la condition (*), il en existe qui:

- sont quasi-réductives.
- qui sont de rang nul et d'indice strictement positif.
- qui sont de rang non nul et non quasi-réductives.

(2) Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quasi-réductive, alors l'ensemble des formes fortement régulières sur $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des $g \in \mathfrak{g}^*$ telles que $\mathfrak{g}(g) = \mathfrak{j} \oplus {}^u\mathfrak{z}$, avec $\mathfrak{j}$ un tore et ${}^u\mathfrak{z}$ le radical unipotent du centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ (voir [[5], Théorème 3.4.1]). Compte tenu de ce résultat et comme son centre est nul, une sous-algèbre biparabolique qui vérifie la condition (*) est quasi-réductive si et seulement si son rang est égal à son indice. ■

Désormais, on suppose que $\mathfrak{q}$ vérifie la condition (*) et on désigne par A le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{q}^*$ engendré par $\{X_{\xi}^*, \xi \in \mathcal{E}_{\pi''}\} \cup \{X_{-\xi}^*, \xi \in \mathcal{E}_{\pi'}\}$. Alors

$$\dim(A) = k_{\pi'} + k_{\pi''} \geq \text{ind}(\mathfrak{q}).$$

Dans cette partie, on ramène l'étude de la stabilité au sous-espace vectoriel A qui nous sera utile par la suite. Pour ce faire, on procède comme suit:

Proposition 3.2. *Il existe $f \in A$ tel que $A + \mathfrak{q}.f = \mathfrak{q}^*$.*

Preuve. On fait le calcul de $\mathfrak{q}(f)$ pour un $f \in A$ particulier, mais en fait suffisamment générique, obtenant une base de $\mathfrak{q}(f)$ dont les vecteurs s'expriment comme combinaison linéaire effective (c'est à dire dont tous les coefficients sont non nuls) de certains vecteurs radiciels de sorte que $\mathfrak{q}(f) \cap A^{\perp} = \{0\}$. D'où le résultat. ■

On donne ici un exemple permettant au lecteur d'illustrer la démonstration de la proposition précédente.

On prend $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de type F_4 et $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_2, \alpha_4\}}$. Ici on a

$$A = \{f = \lambda_1 x_{\alpha_2}^* + \lambda_2 x_{\alpha_4}^* + \lambda_3 x_{-\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3}^* + \lambda_4 x_{-\alpha_1}^* + \lambda_5 x_{-\alpha_3}^* / \lambda_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq 5\}.$$

Soit $f = \varphi_v \in A$, où $v = a_1x_{-\alpha_2} + a_2x_{-\alpha_4} + b_1x_{\alpha_1} + b_2x_{\alpha_3} + b_3x_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}$ (les a_i et les b_j sont tous non nuls). Dans ce cas, on a $\dim(\mathfrak{q}(f)) = 1$ de sorte que la forme linéaire f est régulière. Comme $X \in \mathfrak{q}(f)$ si et seulement si $[X, v] \in \mathfrak{q}^{\perp_K}$, on obtient $\mathfrak{q}(f) = \mathbb{K}X$ avec

$$X = x_{\alpha_2} + \mu_1 x_{-\alpha_1} + \mu_2 x_{-\alpha_3} + \mu_3 x_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} + \mu_4 x_{-\alpha_2-2\alpha_3} + \mu_5 x_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}$$

$$\text{où} \quad \mu_1 = \frac{-a_1}{2b_1}, \quad \mu_2 = \frac{-a_1}{2b_2}, \quad \mu_3 = \frac{b_2}{b_3}, \quad \mu_4 = \frac{b_1}{b_3} \quad \text{et} \quad \mu_5 = \frac{a_1}{2b_3}.$$

Par suite et d'après ce qui précède, on a $\mathfrak{q}(f) \cap A^{\perp} = \{0\}$ de sorte que $A + \mathfrak{q}.f = \mathfrak{q}^*$. Une conséquence de la proposition précédente est que le sous-espace vectoriel A est transverse aux orbites. Par suite, on a les résultats suivants:

Corollaire 3.3. *Les ensembles $\mathfrak{q}_{reg}^* \cap A$ et $\mathfrak{q}_{treg}^* \cap A$ sont des ouverts de Zariski non vides de A .*

Proposition 3.4. *Pour la sous-algèbre biparabolique $\mathfrak{q}$ vérifiant la condition $(*)$, les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) $\mathfrak{q}$ n'est pas stable,
- (ii) il existe un ouvert de Zariski A' de A tel que, pour tout $f \in A'$, $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}(f)] \cap \mathfrak{q}(f) \neq \{0\}$.

Preuve. C'est une conséquence du lemme 2.2 et du corollaire 3.3. ■

Remarque 3.5. Compte tenu de ce qui précède et pour montrer que la sous-algèbre biparabolique $\mathfrak{q}$ n'est pas stable, il suffit de montrer qu'il existe $h \in \mathfrak{h}$ et A' ouvert de Zariski de A tel que

$$\text{pour tout } f \in A', \text{ il existe } X \in \mathfrak{q}(f) \text{ non nul tel que } h.f = -f \text{ et } [h, X] = -X$$

de sorte que pour tout $f \in A'$ et pour cet X dépendant de f , on a $[h, X].f = 0$ (c'est à dire $[h, X] \in \mathfrak{q}(f)$) et donc $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}(f)] \cap \mathfrak{q}(f) \neq \{0\}$. ■

Théorème 3.6. *Soit $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{g}$ vérifiant la condition $(*)$. On suppose qu'elle vérifie de plus la condition:*

- (**) *il existe $A' \subset A$ un ouvert de Zariski et $h \in \mathfrak{h}$ tels que $\forall f \in A'$, $h.f = -f$ et $[h, x] = -x$, $\forall x \in \mathfrak{q}(f)$.*

Alors, $\text{rang}(\mathfrak{q}) = 0$, $\text{ind}(\mathfrak{q}) > 0$ et $\mathfrak{q}$ est non stable.

Preuve. Supposons qu'il existe un élément $h \in \mathfrak{h}$ et un ouvert de Zariski A' de A tels que $h.f = -f$, $\forall f \in A'$ et $[h, x] = -x$, $\forall x \in \mathfrak{q}(f)$. Supposons de plus qu'il existe un élément $X \in \mathfrak{q}(f)$ semi-simple. Soient λ une valeur propre de adh , V_{λ} le sous-espace propre correspondant de adh dans $\mathfrak{q}$ et $v \in V_{\lambda}$. On a

$$h.X.v = [h, X].v + X.h.v = -X.v + \lambda X.v = (\lambda - 1)X.v$$

ainsi et compte tenu de ce qui précède, l'endomorphisme X envoie le sous-espace V_{λ} dans $V_{\lambda-1}$. Par suite, l'endomorphisme X est nilpotent. Ceci contredit le fait que X est semi-simple et donc le rang de $\mathfrak{q}$ est nul. D'autre part et comme, d'après la remarque 3.5, $\mathfrak{q}$ est non stable, $\mathfrak{q}$ est non quasi-réductive. Ceci implique que l'indice de $\mathfrak{q}$ est strictement positif. ■

4. Résolution de la conjecture pour les sous-algèbres biparaboliques $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$

L'objectif de toute la suite est de donner une réponse positive à la conjecture de Panyushev. La démarche générale est la suivante:

soit $\mathfrak{q}$ une sous-algèbre biparabolique d'une algèbre de Lie simple exceptionnelle. Nous voulons montrer que si $\mathfrak{q}$ n'est pas quasi-réductive, elle n'est pas stable. On sait qu'il suffit de le faire lorsque $\mathfrak{q}$ est de rang nul et d'indice strictement positif, donc lorsqu'elle vérifie la condition (*). En fait, nous montrons que toute sous-algèbre biparabolique $\mathfrak{q}$ non quasi-réductive est non stable. Pour ce faire, on suit les étapes suivantes:

- (1) on donne la liste des sous-algèbres $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ vérifiant la condition (*),
- (2) pour chaque élément $\mathfrak{q}$ de la liste, on calcule son indice à l'aide de la formule (1),
- (3) pour chaque élément de la liste, on choisit un élément $f \in A$ et, à l'aide de GAP4 (voir [9]), on montre qu'il vérifie l'assertion de la proposition 3.2,
- (4) pour cet élément f , à l'aide de GAP4, on calcule $\mathfrak{q}(f)$ et on vérifie que $\dim \mathfrak{q}(f) = \text{ind}(\mathfrak{q})$, i.e que f est une forme linéaire régulière,
- (5) ensuite, toujours à l'aide de GAP4, on calcule la codimension dans $\mathfrak{q}(f)$ de $\mathfrak{q}(f)^{\perp \kappa} \cap \mathfrak{q}(f)$ (qui n'est autre que la dimension d'un facteur réductif de $\mathfrak{q}(f)$),
 - (a) si cette codimension est non nulle, le rang de $\mathfrak{q}$ est strictement positif et on retire $\mathfrak{q}$ de la liste des sous-algèbres biparaboliques à traiter,
 - (b) si cette codimension est nulle, à ce stade on ne sait pas si $\text{rang}(\mathfrak{q})$ est nul. Néanmoins, on trouve, par calculs, un élément $h \in \mathfrak{h}$ (et un ouvert de Zariski $A' \subset A$) vérifiant la condition (**). Ceci montre que dans ce cas:
 - $\mathfrak{q}$ est de rang nul,
 - $\mathfrak{q}$ n'est pas stable,
 ce qui achève la démonstration de la conjecture.

Après avoir appliqué ce procédé, on constate que les algèbres restantes sont toutes d'indice 1, 2 ou 3. Pour illustrer les étapes précédentes, on donne les calculs effectués pour les types F_4 et E_6 (voir ci-après).

Comme les sous-algèbres biparaboliques $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ et $\mathfrak{q}_{\pi'', \pi'}$ sont conjuguées, on peut supposer que π' et π'' sont tels que $k_{\pi'} + k_{\pi''} > \text{rang}(\mathfrak{g})$ et $k_{\pi'} > \frac{\text{rang}(\mathfrak{g})}{2}$.

De plus, nous distinguerons entre les deux cas complémentaires suivants:

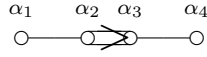
- (i) π' est connexe.
- (ii) π' n'est pas connexe et π'' n'est pas connexe ou $k_{\pi''} \leq \frac{\text{rang}(\mathfrak{g})}{2}$.

Remarque 4.1. (i) Les calculs effectués avec GAP4 ne nous permettent pas en général de déterminer le rang des sous-algèbres de Lie étudiées. Ils permettent simplement de montrer que certaines d'entre-elles sont de rang non nul. Néanmoins, dans la plupart des cas ces calculs montrent que, pour la forme linéaire f choisie, $\mathfrak{q}(f)$ est réductif de sorte que l'indice et le rang de $\mathfrak{q}$ sont égaux et que $\mathfrak{q}$ est une algèbre de Lie quasi-réductive.

(ii) Dans le cas contraire, il s'avère que le choix des valeurs a_K et b_L que nous avons fait est suffisamment générique pour que la forme linéaire soit fortement régulière:

en effet, nous sommes capables de trouver un élément $h \in \mathfrak{h}$ vérifiant la condition (**) du théorème 3.6 pour f dans un ouvert de Zariski A' de A . ■

Calculs dans F_4 :



Il est clair que si la sous-algèbre biparabolique $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ vérifie la condition (*) alors π' ou π'' est de type B_3 ou C_3 .

Supposons π' de type B_3 : $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, on a $\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1, \alpha_3\}$:

Type	π''	$\text{ind}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$
A_1^2	$\{\alpha_2, \alpha_4\}$	1	0
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$	1	1
C_3	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$	2	2

T1

Dans toute la suite et pour calculer le stabilisateur $\mathfrak{q}(f)$, on procède comme suit: on fait le calcul pour un $f \in A$ particulier, mais en fait suffisamment générique, obtenant une base de $\mathfrak{q}(f)$ dont les vecteurs s'expriment comme combinaison linéaire effective (c'est à dire dont tous les coefficients sont non nuls) de certains vecteurs radiciels, puis pour un f générique quelconque on vérifie que ce résultat reste vrai.

D'après le tableau ci-dessus (voir les calculs ci-après), $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_2, \alpha_4\}}$ est la seule sous-algèbre biparabolique de rang nul et d'indice strictement positif:

Soit $f = \varphi_v \in A$, où $v = a_1x_{-\alpha_2} + a_2x_{-\alpha_4} + b_1x_{\alpha_1} + b_2x_{\alpha_3} + b_3x_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}$ (les a_i et les b_j sont tous non nuls). Dans ce cas, on a $\dim(\mathfrak{q}(f)) = \text{ind}(\mathfrak{q}) = 1$ de sorte que la forme linéaire f est régulière. Comme $X \in \mathfrak{q}(f)$ si et seulement si $[X, v] \in \mathfrak{q}^{\perp_K}$, on obtient $\mathfrak{q}(f) = \mathbb{K}X$ avec

$$X = x_{\alpha_2} + \frac{-a_1}{2b_1} x_{-\alpha_1} + \frac{-a_1}{2b_2} x_{-\alpha_3} + \frac{b_2}{b_3} x_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} + \frac{b_1}{b_3} x_{-\alpha_2-2\alpha_3} + \frac{a_1}{2b_3} x_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}.$$

Soit alors $h \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha_1(h) = \alpha_3(h) = -\alpha_2(h) = -\alpha_4(h) = 1$. On a $h.f = -f$ et $[h, X] = -X$. Par suite, l'ensemble

$$A' = \{f = \sum_{K \in \mathcal{K}(\pi'')} a_K X_{\varepsilon_K}^* + \sum_{L \in \mathcal{K}(\pi')} b_L X_{-\varepsilon_L}^*; a_K \neq 0 \text{ et } b_L \neq 0\} \subset A$$

est un ouvert de Zariski et h vérifie $h.f = -f$, $\forall f \in A'$ et $[h, X] = -X$, $\forall X \in \mathfrak{q}(f)$ de sorte que l'algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ est non stable d'après la remarque 3.5. L'algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ est non quasi-réductive et donc son rang est nul (d'après la remarque 3.1).

Pour les autres sous-algèbres de la liste précédente et en utilisant des calculs effectués avec GAP4, on montre qu'elles sont de rang non nul et donc sont à éliminer de la liste de celles à traiter. Notons bien que l'utilisation de GAP4 pour ce type de problèmes n'est pas nouvelle (voir par exemple [6]). On donne un exemple pour la commutativité du lecteur. L'algèbre de Lie considéré est $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}}$:

```
gap > L := SimpleLieAlgebra("F", 4, Rationals);; R := RootSystem(L);;
gap > x := PositiveRootVectors(R);; y := NegativeRootVectors(R);;
gap > g := CanonicalGenerators(R);; h := g[3];;
```

On peut désormais faire des calculs dans l'algèbre de Lie $\mathbf{L}$. Ensuite, on définit la sous-algèbre biparabolique $P := \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ engendrée par gP (dp désigne la dimension de P):


```
gap > gP := Concatenation(x{[1..2]} + x{[4]}, h, y{[2..4]});;
P := Subalgebra(L, gP);; dp := Dimension(P); 17
```

Puis, on définit l'élément $v = \sum_{K \in \mathcal{K}(\pi')} a_K X_{\varepsilon_K} + \sum_{L \in \mathcal{K}(\pi'')} b_L X_{-\varepsilon_L}$ de $\mathfrak{q}_{\pi'', \pi'}$ et on note $f = \varphi_v \in P^*$ la forme linéaire qui lui est associée. Notons ici que GAP4 n'est pas adapté au calcul formel (il faut donner donc des valeurs pour les a_K et les b_L):

```
gap > a1 := 1;; a2 := 1;;
gap > b1 := 2;; b2 := 5;; b3 := 1;;
gap > u1 := a1*y[6] + a2*y[1];; u2 := b1*x[2] + b2*x[3] + b3*x[16];; v := u1 + u2;;
```

Pour calculer le stabilisateur de f dans P , on calcule tout d'abord l'espace V engendré par les crochets $v * bP[i]$ (la commande "List(Basis(P))" donne une base de P , que l'on note bP), pour $i = 1, \dots, dp$, dp désigne la dimension de P . On obtient l'orthogonal K de l'espace V pour la forme de Killing avec la commande "KappaPerp". Ainsi, le stabilisateur de f dans P , que l'on note S , n'est autre que l'intersection de K et P :

```
gap > bP := List(Basis(P));; l := []; for i in [1..dp] do l[i] := v * bP[i]; od;; l;;
gap > V := Subspace(L, l);; K := KappaPerp(L, V);; S := Intersection(K, P);;
dS := Dimension(S); 1
```

Ce résultat montre que la dimension du stabilisateur est égal à l'indice de $\mathfrak{q}$ est donc notre forme est régulière.

```
gap > bS := List(Basis(S));
[v.2 + (-1/50)*v.6 + (-1/200)*v.26 + (1/500)*v.27 + (1/10)*v.31 + (-1/100)*v.40]
```

Ce résultat donne une base du stabilisateur S .

```
gap > KS := Intersection(KappaPerp(L, S), S);
<vector space of dimension 0 over Rationals>
```

Le dernier résultat montre que notre forme linéaire est de type réductif et donc la sous-algèbre $\mathfrak{q}$ est quasi-réductive de sorte que $\text{ind}(\mathfrak{q}) = \text{rang}(\mathfrak{q}) = 1$.

Supposons maintenant π' de type C_3 : $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, ici on a

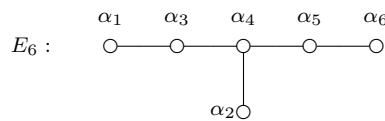
$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2\}:$$

Type	π''	$\text{ind}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$
A_1^2	$\{\alpha_1, \alpha_3\}$	1	1
A_1^2	$\{\alpha_1, \alpha_4\}$	1	1
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$	1	1
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$	1	1
B_3	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$	2	2

T2

Dans le cas traité et en utilisant "GAP4", on vérifie que toutes les sous-algèbres biparaboliques qui vérifient la condition (*) sont quasi-réductives (on procède de la même manière que dans le cas précédent).

Calculs dans E_6 :



Il est clair que si la sous-algèbre biparabolique $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ vérifie la condition (*) alors π' ou π'' est de type D_4 ou D_5 .

Ici on ne donne les calculs que pour les sous-algèbres de rang nul et d'indice strictement positif. On procède comme dans le cas F_4 pour vérifier que le reste des sous-algèbres sont toutes quasi-réductives.

Supposons π' de type D_4 , on a $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}:$$

Type	π''	$\text{ind}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	
A_1^3	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6\}$	1	0	T3
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\}$	1	1	
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$	1	1	
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$	1	1	

Dans ce cas et d'après le tableau ci-dessus $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\{\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_4\}, \{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6\}\}}$ est la seule sous-algèbre biparabolique de rang nul et d'indice strictement positif:

Soit $f = \varphi_v \in A$, où

$$v = a_1 x_{-\alpha_1} + a_2 x_{-\alpha_4} + a_3 x_{-\alpha_6} + b_1 x_{\alpha_2} + b_2 x_{\alpha_3} + b_3 x_{\alpha_5} + b_4 x_{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5}$$

(les a_i et les b_j sont tous non nuls). Dans ce cas, on a $\dim(\mathfrak{q}(f)) = 1$. Comme $X \in \mathfrak{q}(f)$ si et seulement si $[X, v] \in \mathfrak{q}^{\perp_K}$, on obtient $\mathfrak{q}(f) = \mathbb{K}X$ avec

$$\begin{aligned} X = & x_{\alpha_4} + \frac{-a_2}{2b_1} x_{-\alpha_2} + \frac{-a_2}{2b_2} x_{-\alpha_3} + \frac{-a_2}{2b_3} x_{-\alpha_5} + \frac{b_3}{b_4} x_{-\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4} + \\ & + \frac{-b_2}{b_4} x_{-\alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_5} + \frac{-b_1}{b_4} x_{-\alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5} + \frac{a_2}{2b_4} x_{-\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 - \alpha_5}. \end{aligned}$$

Soit $h \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha_2(h) = \alpha_3(h) = \alpha_5(h) = -\alpha_1(h) = -\alpha_4(h) = -\alpha_6(h) = 1$. On a $h.f = -f$ et $[h, X] = -X$ de sorte que l'algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ est non stable.

Supposons maintenant π' de type D_5 , par symétrie on prend $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$.

Ici, on a $\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_1, \alpha_4\}$:

Type	π''	$\text{ind}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	
A_1^3	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6\}$	1	0	T4
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6\}$	1	1	
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$	1	0	
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$	1	1	
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$	1	1	

Soient $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_{\{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6\}\}}$ et $f = \varphi_v \in A$, où $v = a_1 x_{-\alpha_2} + a_2 x_{-\alpha_3} + a_3 x_{-\alpha_6} + b_1 x_{\alpha_1} + b_2 x_{\alpha_4} + b_3 x_{\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5} + b_4 x_{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5}$ (les a_i et les b_j sont tous non nuls). Dans ce cas, $\mathfrak{q}_1(f) = \mathbb{K}X$ avec

$$\begin{aligned} X = & x_{\alpha_3} + \frac{-a_2}{2b_1} x_{-\alpha_1} + \frac{-a_2}{2b_2} x_{-\alpha_4} + \frac{-b_3}{b_4} x_{-\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4} + \frac{-a_2}{2b_3} x_{-\alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_5} + \\ & + \frac{-b_2}{b_4} x_{-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5} + \frac{b_1}{b_4} x_{-\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 - \alpha_5} + \frac{a_2}{2b_4} x_{-\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 - 2\alpha_4 - \alpha_5}. \end{aligned}$$

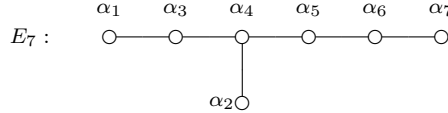
Soit $h \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha_1(h) = \alpha_4(h) = \alpha_5(h) = 1 = -\alpha_2(h) = -\alpha_3(h) = -\alpha_6(h) = 1$. On a $h.f = -f$ et $[h, X] = -X$ de sorte que l'algèbre de Lie $\mathfrak{q}_1$ est non stable.

Soient maintenant $\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}}$ et $f = \varphi_v \in A$, où

$$v = a_1 x_{-\alpha_2} + a_2 x_{-\alpha_3} + a_3 x_{-\alpha_5 - \alpha_6} + b_1 x_{\alpha_1} + b_2 x_{\alpha_4} + b_3 x_{\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5} + b_4 x_{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5}$$

(les a_i et les b_j sont tous non nuls). Dans ce cas, on vérifie que $\mathfrak{q}_2(f) = \mathbb{K}X$ où $X \in \mathfrak{g}$ est l'élément calculé dans le cas précédent tel que $\mathfrak{q}_1(f) = \mathbb{K}X$. Soit alors $h \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha_1(h) = \alpha_4(h) = \alpha_5(h) = -\alpha_2(h) = -\alpha_3(h) = -1$ et $\alpha_6(h) = -2$. On a $h.f = -f$ et $[h, X] = -X$ de sorte que l'algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ est non stable.

Calculs dans E_7 :



Remarquons tout d'abord que si la sous-algèbre biparabolique $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ vérifie la condition (*) alors π' est tel que $\mathcal{K}(\pi')$ est de cardinal supérieur ou égal à 4.

Cas où π' est connexe:

Alors π' peut être de type D_4 , D_5 , D_6 ou E_6 . On vérifie que si π' est de type D_4 la condition (*) ne peut être satisfaite. On procède de la même manière que dans les cas F_4 et E_6 pour la démonstration de la deuxième partie du théorème précédent.

Supposons π' de type D_5 , $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_1, \alpha_4\}:$$

Type	π''	$\text{ind}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	T5
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	0	
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1	
D_6	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	3	3	

Supposons π' de type D_5 , on a $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4, \alpha_6\}:$$

Type	π''	$\text{ind}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	T6
A_1^4	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_7\}$	1	0	
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7\}$	1	0	

Supposons π' de type D_6 , on a $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7\}:$$

Type	π''	$\text{ind}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	T7a
A_1^2	$\{\alpha_1, \alpha_4\}$	1	0	
A_1^2	$\{\alpha_1, \alpha_6\}$	1	0	
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$	1	1	
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5\}$	1	1	

$Type$	π''	$\text{ind}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6\}$	1	1
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6\}$	1	0
$A_2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$	1	1
$A_2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
A_4	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$	1	1
A_4	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$	1	1
A_1^3	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6\}$	2	0
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7\}$	2	2
$A_1 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	2	2
$A_1 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\}$	2	2
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	2	2
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$	2	2
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	2	2
$A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7\}$	2	2
A_5	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$	2	2
A_6	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	2	2
E_6	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$	3	3

T7b

On donne ici les calculs effectués pour le premier exemple d'une sous-algèbre bi-parabolique d'indice 2 et non quasi-réductive.

Soit alors $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}, \{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6\}}$. Soit $f = \varphi_v \in A$, où

$$v = a_1 x_{-\alpha_1} + a_2 x_{-\alpha_4} + a_3 x_{-\alpha_6} + b_1 x_{\alpha_2} + b_2 x_{\alpha_3} + b_3 x_{\alpha_5} + b_4 x_{\alpha_7} + \\ + b_5 x_{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5} + b_6 x_{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7}$$

(les a_i et les b_j sont tous non nuls). Dans ce cas, on a $\mathfrak{q}(f) = \mathbb{K}X \oplus \mathbb{K}Y$ avec

$$X = x_{\alpha_4} - \frac{a_2}{2b_1} x_{-\alpha_2} - \frac{a_2}{2b_2} x_{-\alpha_3} - \frac{a_2}{2b_3} x_{-\alpha_5} + \frac{b_3}{b_5} x_{-\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4} - \frac{b_2}{b_5} x_{-\alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_5} - \\ - \frac{b_1}{b_5} x_{-\alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5} + \frac{a_2}{2b_5} x_{-\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 - \alpha_5} \text{ et} \\ Y = x_{\alpha_6} - \frac{a_3}{2b_3} x_{-\alpha_5} - \frac{a_3}{2b_4} x_{-\alpha_7} + \frac{b_5}{b_6} x_{-\alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7} - \frac{a_3}{2b_5} x_{-\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 - \alpha_5} + \\ + \frac{b_4}{b_6} x_{-\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 - 2\alpha_5 - \alpha_6} + \frac{b_3}{b_6} x_{-\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7} + \frac{a_3}{2b_6} x_{-\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 - 2\alpha_5 - 2\alpha_6 - \alpha_7}.$$

Soit $h \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha_2(h) = \alpha_3(h) = \alpha_5(h) = \alpha_7(h) = -\alpha_1(h) = -\alpha_4(h) = -\alpha_6(h) = 1$. On a $h.f = -f$, $[h, X] = -X$ et $[h, Y] = -Y$. Ceci et compte tenu du théorème 3.6, montre que $\text{rang}(\mathfrak{q}) = 0$ et $\mathfrak{q}$ est non stable.

Supposons π' de type E_6 , on a $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$. Ici, on a $\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_4\}$:

Type	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$	T8
A_1^4	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_7\}$	1	0	
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7\}$	1	0	
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	0	
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	0	
$A_1 \times A_5$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1	

Cas où π' est non connexe et π'' est non connexe ou tel que $\mathcal{K}(\pi'')$ est de cardinal inférieur ou égal à 3:

Dans ce cas, il est clair que si la sous-algèbre biparabolique $\mathbf{q}_{\pi', \pi''}$ vérifie la condition (*) alors π' ou π'' est de type $A_1^2 \times A_3$, $A_1 \times A_2 \times A_3$, $A_1 \times A_5$, $D_4 \times A_1$ ou $D_5 \times A_1$.

Supposons π' de type $A_1^2 \times A_3$, $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_7\}:$$

Type	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$	T9
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1	
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1	

Supposons π' de type $A_1 \times A_5$, $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_5, \alpha_1\}:$$

Type	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$	T10
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1	
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1	

Supposons π' de type $D_4 \times A_1$, $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7\}:$$

Type	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$	T11
A_1^3	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6\}$	1	0	
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\}$	1	1	
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	0	
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1	
$A_1 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1	
$A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1	
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$	1	1	
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$	1	1	
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	0	
$A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1	
A_6	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1	

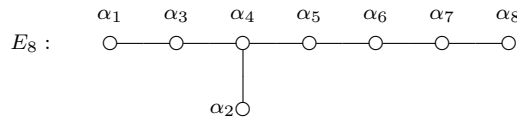
Supposons π' de type $D_5 \times A_1$, $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_7\}:$$

Type	π''	$\text{ind}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$
A_1^3	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6\}$	1	0
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$	1	0
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	0
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$	1	1
$A_1 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
$A_1 \times A_3$	$\{\alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	0
$A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$	1	1
$A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
A_5	$\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
A_5	$\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	0
A_6	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	2	2

T12

Calculs dans E_8 :



Remarquons tout d'abord que si la sous-algèbre biparabolique $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$ vérifie la condition (*) alors π' est tel que $\mathcal{K}(\pi')$ est de cardinal supérieur ou égal à 5.

Cas où π' est connexe:

Supposons que π' de type D_6 , $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_7, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}.$$

On commence tout d'abord par le cas où le cardinal de $\mathcal{K}(\pi'')$ est égal à 3:

Type	π''	$\text{ind}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$
A_1^3	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_8\}$	1	0
A_1^3	$\{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	0
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	0
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	1
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1

T13a

$Type$	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_8\}$	1	1
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_8\}$	1	1
$A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
$A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
$A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1

T13b

Cas où le cardinal de $\mathcal{K}(\pi'')$ est égal à 4:

$Type$	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$
A_1^4	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	2	0
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''}) \leq 2$
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_8\}$	2	2
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	2	2
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''}) \leq 2$
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
$A_1 \times A_5$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	2	2
$A_1 \times A_5$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
$A_1 \times A_6$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2

T14

Cas où le cardinal de $\mathcal{K}(\pi'')$ est égal à 5:

$Type$	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$
$D_5 \times A_1$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_8\}$	3	3
$E_6 \times A_1$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	3	3
$D_5 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	3	3

T15

Supposons maintenant π' de type D_7 , on a $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8, \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_6, \alpha_4, \alpha_8\}.$$

On commence tout d'abord par le cas où le cardinal de $\mathcal{K}(\pi'')$ est égal à 3:

$Type$	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$
A_1^3	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5\}$	1	0
A_1^3	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_7\}$	1	0
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6\}$	1	1
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$	1	0
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_7\}$	1	0
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1

T16a

<i>Type</i>	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$	1	1
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
$A_1 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_7\}$	1	0
$A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
$A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$	1	1
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_7\}$	1	0
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7\}$	1	0
$A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
$A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
$A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
A_6	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1

T16b

Cas où le cardinal de $\mathcal{K}(\pi'')$ est supérieur ou égal à 4:

<i>Type</i>	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$
A_1^4	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_7\}$	2	0
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_7\}$	2	0
$A_1^2 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
$A_1 \times A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
$A_1 \times A_5$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	2	2
$A_1 \times A_6$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
$A_3 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
$A_3 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
A_7	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
E_7	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	5	5

T17

Supposons maintenant π' de type E_7 , on a $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7,$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_7, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}.$$

On commence tout d'abord par le cas où le cardinal de $\mathcal{K}(\pi'')$ est égal à 2:

$Type$	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$
A_1^2	$\{\alpha_1, \alpha_8\}$	1	0
A_1^2	$\{\alpha_4, \alpha_8\}$	1	0
A_1^2	$\{\alpha_6, \alpha_8\}$	1	0
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_8\}$	1	1
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_8\}$	1	1
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_8\}$	1	1
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_8\}$	1	1
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	1
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0
$A_1 \times A_2$	$\{\alpha_4, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0
$A_2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
$A_2 \times A_2$	$\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
$A_2 \times A_2$	$\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
$A_2 \times A_2$	$\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
A_4	$\{\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1

T18

Cas où le cardinal de $\mathcal{K}(\pi'')$ est égal à 3:

$Type$	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$
A_1^3	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_8\}$	2	0
A_1^3	$\{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_8\}$	2	0
A_1^3	$\{\alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	2	0
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_8\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_8\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	0
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_8\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_1^2 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	2	2
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_1 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_1 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_8\}$	2	2
$A_1 \times A_3$	$\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_8\}$	2	2
$A_1 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_8\}$	2	2
$A_2 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
$A_2 \times A_3$	$\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
$A_2 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2

T19a

$Type$	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_8\}$	2	2
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_8\}$	2	2
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	2	2
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	2	2
$A_1 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 2$
$A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
$A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
$A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
A_5	$\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
A_6	$\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2
A_6	$\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	2	2

T19b

Cas où le cardinal de $\mathcal{K}(\pi'')$ est supérieur ou égal à 4:

$Type$	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''})$
A_1^4	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	3	0
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	3	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 3$
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	3	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 3$
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_8\}$	3	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 3$
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	3	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 3$
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	3	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 3$
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	3	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 3$
$A_1 \times A_5$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	3	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 3$
$A_1 \times A_5$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	3	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 3$
$A_1 \times A_6$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	3	$1 \leq \text{rang}(\mathbf{q}_{\pi', \pi''}) \leq 3$
$D_5 \times A_1$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_8\}$	4	4
$D_5 \times A_1$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	4	4
$E_6 \times A_1$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	4	4
$D_5 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	4	4

T20

Cas où π' est non connexe et π'' est non connexe ou tel que $\mathcal{K}(\pi'')$ est de cardinal inférieur ou égal à 4:

Dans ce cas, il est clair que si la sous-algèbre biparabolique $\mathbf{q}_{\pi', \pi''}$ vérifie la condition (*) alors π' ou π'' est de type $D_4 \times A_1$, $D_4 \times A_2$, $D_5 \times A_1$, $D_5 \times A_2$ ou $E_6 \times A_1$.

1. Supposons π' de type $D_4 \times A_1$:

$$\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7\} \text{ ou } \pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_8\}.$$

a. Soit $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7\}$. Ici, on a $\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7\}$:

<i>Type</i>	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	T21
A_1^4	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	0	
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1 \times A_5$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1 \times A_6$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0	

b. Soit $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_8\}$. Ici, on a $\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_8\}$:

<i>Type</i>	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	T22
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0	
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1 \times A_5$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0	
$A_1 \times A_6$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	
$A_3 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	

2. Supposons π' de type $D_4 \times A_2$: $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7 + \alpha_8\}:$$

<i>Type</i>	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	T23
A_1^4	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	0	
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0	
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1 \times A_5$	$\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1 \times A_6$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	
$A_3 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	

3. Supposons π' de type $D_5 \times A_1$: $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7\}$ ou

$$\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_8\} \text{ ou } \pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}.$$

a. Soit $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_7\}:$$

<i>Type</i>	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	T24a
A_1^4	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	0	
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	0	
$A_1^2 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	1	

<i>Type</i>	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	T24b
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0	
$A_1 \times A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	
A_7	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0	

b. Soit $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_8\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_8\}:$$

<i>Type</i>	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	T25
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0	
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	0	
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1	
$A_3 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	
A_7	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	

c. Soit $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$. Ici, on a

$$\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}:$$

<i>Type</i>	π''	$\text{ind}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	$\text{rang}(\mathbf{q}_{\pi',\pi''})$	T26
A_1^4	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_7\}$	1	0	
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7\}$	1	0	
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0	
$A_1^2 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0	
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0	
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	
$A_1 \times A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0	
$A_1 \times A_6$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	
$A_3 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	
$A_3 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1	

3. Supposons maintenant π' de type $D_5 \times A_2$. Ici, on a $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$

et $\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_7 + \alpha_8\}:$

$Type$	π''	$\text{ind}(\mathfrak{q}_{\pi',\pi''})$	$\text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi',\pi''})$
A_1^4	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	0
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	1
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	0
$A_1^2 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	1
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	0
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8\}$	1	1
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
$A_1 \times A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
$A_3 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
A_7	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1

T27

4. Supposons maintenant π' de type $E_6 \times A_1$. Ici, on a $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8\}$ et $\mathcal{E}_{\pi'} = \{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_4, \alpha_8\}$:

$Type$	π''	$\text{ind}(\mathfrak{q}_{\pi',\pi''})$	$\text{rang}(\mathfrak{q}_{\pi',\pi''})$
A_1^4	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_7\}$	1	0
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0
$A_1^3 \times A_2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7\}$	1	0
$A_1^2 \times A_2^2$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0
$A_1^2 \times A_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	0
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0
$A_1 \times A_2 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	0
$A_1^2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0
$A_1 \times A_2 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0
$A_1 \times A_5$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$	1	1
$A_3 \times A_3$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1
$A_3 \times A_4$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	0
A_7	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	1	1

T28

Remerciements.

Je remercie Pierre Torasso et Mohamed-Salah Khalgui pour leurs remarques pertinentes.

References

- [1] K. Ammari: *Stabilité des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(n)$* , J. Lie Theory 24 (2013) 97–122.
- [2] K. Ammari: *Stabilité des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples exceptionnelles*, Bull. Sci. Math. 138 (2014) 614–625.
- [3] M. Duflo: *Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie*, in: *Harmonic Analysis and Group Representations*, A.F. Talamanca (ed.), CIME 1980, Liguori Editori, Napoli (1982) 129–221.
- [4] M. Duflo: *Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques*, Acta Math. 149 (1982) 153–213.
- [5] M. Duflo, M. S. Khalgui, P. Torasso: *Algèbres de Lie quasi-réductives*, Transformation Groups 17 (2012) 417–470.
- [6] K. Baur, A. Moreau: *Quasi-reductive (bi)parabolic subalgebras in reductive Lie algebras*, J. Algebra 41 (2011) 417–451.
- [7] J. Dixmier: *Enveloping Algebras*, Graduate Studies in Mathematics 11, revised reprint of the 1977 translation, American Mathematical Society, Providence (1996).
- [8] N. Djebali: *Sous-groupes réductifs canoniques des sous-groupes biparaboliques de $SO(n, \mathbb{C})$ ou $SO(p, q)$ dont l'algèbre de Lie est quasi-réductive*, J. Lie Theory 28 (2018) 443–477.
- [9] The GAP Group – GAP: *GAP - Groupes, algorithmes et programmation, Version 4.10.2*, <https://www.gap-system.org> (2019).
- [10] A. Joseph: *On semi-invariants and index for biparabolic (seaweed) algebras I*, J. Algebra 305 (2006) 487–515.
- [11] Y. Kosmann, S. Sternberg: *Conjugaison des sous-algèbres d'isotropie*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 279 (1974) 777–779.
- [12] B. Kostant: *The cascade of orthogonal roots and the coadjoint structure of the nilradical of a Borel subgroup of a semisimple Lie group*, arXiv: 1101.5382 (2011).
- [13] B. Kostant: *Center of $U(n)$, cascade of orthogonal roots, and a construction of Lipsman-Wolf*, arXiv: 1201.4494 (2012).
- [14] D. I. Panyushev: *An extension of Raïs' theorem and seaweed subalgebras of simple Lie algebras*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005) 693–715.
- [15] D. I. Panyushev, O. S. Yakimova: *On seaweed subalgebras and meander graphs in type D*, arXiv: 1702.07879 (2017).
- [16] P. Tauvel, R. W. T. Yu: *Indice et formes linéaires stables dans les algèbres de Lie*, J. Algebra 273 (2004) 507–516.
- [17] P. Tauvel, R. W. T. Yu: *Lie Algebras and Algebraic Groups*, Springer, New York (2005).
- [18] P. Tauvel, R. W. T. Yu: *Sur l'indice de certaines algèbres de Lie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 54 (2005) 1793–1810.

Kais Ammari, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Tunis El-Manar, Tunisie; kais.amari@math.univ-poitiers.fr, ammarikais19@gmail.com.

Received March 26, 2021
and in final form October 25, 2021