Journal of Lie Theory
Volume **23** (2013) 217–228


# Algèbres de Lie 2-nilpotentes et structures symplectiques

**Noureddine Midoune**

Communicated by A. Fialowski

**Résumé.** 2-step nilpotent Lie algebras are finite dimensional Lie algebras $A$ over a field with $[[x,y],z] = 0$ for all $x,y,z$ in $A$. Each of them is a direct product of an abelian ideal and an ideal $B$ with $DB = ZB$ and we get three numerical invariants $r = \dim I, s = \dim DA = \dim DB$. To classify these algebras, it is enough to consider only the case $r = 0$ (or $DA = ZA$ ) and we call $(t,s)$ the type of $A$. In the article "Algèbre de Lie métabéliennes, Ann. Faculté des Sciences Toulouse **II** (1980), 93–100," Ph. Revoy used the Scheuneman invariant (see Scheuneman, J., Two-step nilpotent Lie algebras, J. of Algebra **7** (1967), 152–159) to describe some of these; the aim of this paper is to complete and to make precise our earlier results, especially the case of $s = 2$ or $3$.

We study symplectic structures on 2-step nilpotent Lie algebras and we show that they are rarely symplectic algebras. Finally, symplectic Lie algebras play a role in superconformal field theories (see Parkhomenko, S. E., Quasi-Frobenius Lie algebra constructions of N=4 superconformal field theories, Mod. Phys. Lett. A **11** (1996), 445–461) and have been studied in connection with rational solutions of the classical Yang-Baxter equation (see Stolin, A., Rational solutions of the classical Yang-Baxter equation and quasi Frobenius Lie algebras, J. Pure Appl. Algebra **137** (1999), 285–293).
*Mathematics Subject Classification 2000:* 17B30.
*Key Words and Phrases:* Two-step nilpotent Lie algebras, symplectic Lie algebras.

**Introduction.** Dans toute la suite, on entend par algèbre un $K$-espace vectoriel de dimension finie $A$ muni d'un crochet de Lie. On désigne par $DA$ l'idéal dérivé, sous espace vectoriel enjendré par les crochets $[x,y]$, $x,y \in A$, et par $ZA$ le centre de $A$, c'est à-dire le sous-espace formé des $x$ de $A$ tels que $[x,y] = 0$ quelque soit $y$ dans $A$.

## 1. Algèbre de Lie 2-nilpotente

**Définition 1.1.** Une algèbre de Lie $2-$ nilpotente $A$ est une algèbre de Lie telle que $DA$ est contenu dans $ZA$, c'est -à-dire : $\forall x,y,z \in A$ , $[[x,y],z] = 0$.

On appelle corang de $A$ l'entier $s = \dim ZA - \dim DA$, codimension de $DA$ dans $ZA$.

ISSN 0949–5932 / $2.50 

**Exemple 1.2.** i) une algèbre abélienne est $2-$nilpotente.

ii) l'algèbre de Heisenberg de dimension $2k+1$ est $2-$nilpotente, elle est définie ainsi :

Soit $V$ un espace vectoriel de dimension $2k$ et $B$ une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur $V$. L'algèbre de Heisenberg est $H_k = V \oplus K$ muni d'un crochet de Lie : $[(v,\lambda),(v',\lambda')] = [0, B(v,v')]$.

**1.2.** Soit $V$ un espase vectoriel de dimension finie $n$ et $W$ un sous-espace vectoriel de dimension $r$ de $(\wedge^2 V)^* \simeq \wedge^2 V^*$ de support maximal. Posons $B = V \oplus W^*$; sur $B$, on peut définir un crochet de Lie de la façon suivante : soit $v$, $v' \in V$, $f$ et $f' \in W^*$, on pose $[(v,f),(v',f')] = (0,g)$ où $g \in W^*$est donné par $g(t) = t(v \wedge v')$, $t$ décrivant $W$.

Il est clair que $[[x,y],z] = 0$ quels que soient $x, y$ et $z$ dans $B$, donc $B$ est bien une algèbre de Lie $2-$nilpotente. Son centre contient $W^*$ et son idèal dérivé est contenu dans $W^*$; la condition de maximalité du support de $W$ entraine que $DB = ZB = W^*$.

**Proposition 1.3.** ([8]) *Toute algèbre de Lie $2-$nilpotente $A$ est produit direct d'une algèbre de Lie abélienne et d'une algèbre de Lie $2-$ nilpotente de corang nul, uniques à isomorphismes près.*

*Toute algèbre de Lie $2-$nilpotente de corang nul est isomorphe à une algèbre de Lie $B = V \oplus W^*$ où $W$ est un sous-espace vectoriel de support maximal de $\wedge^2 V^*$, dont le crochet est celui défini ci-dessus.*

**Remarque 1.4.** On appelle $(n = \dim V$ , $r = \dim W)$ le type de l'algèbre de Lie $B$ ; à une algèbre de Lie $2-$nilpotente, on associe ainsi trois entiers $n$ , $r$ et $s$, invariants arithmétiques qui vérifient $\dim D(A) = r$ , $\dim Z(A) = r+s$ et $\dim A = n+r+s$.

Dans [8], sont décrites les algèbres de Lie $2-$nilpotentes ayant $n \leq 4$ générateurs.

**1.4.** Comme $DA = ZA$, le crochet sur $A$ est connu quand il l'est pour deux vecteurs quelconques d'un supplémentaire $V$ de $ZA$ dans $A$ : c'est une fonction bilinéaire alternée de $V \times V$ dans $W = DA$, donc une application linéaire $\varphi\colon \wedge^2 V \longrightarrow W$ surjective. Par dualité, cela équivaut à la donnée de $\psi = t_\varphi$ : $W^* \longrightarrow \wedge^2 V^*$ application linéaire injective et on indentifie $W^*$ à son image dans $\wedge^2 V^*$ qui est un sous-espace vectoriel $W'$ de $\wedge^2 V^*$.

Réciproquement à la donnée d'un sous-espace $Z$ de dimension $s$ de $\wedge^2 V^*$, on associe une algèbre de Lie $2-$nilpotente de la façon suivante : soit $Z^0$ l'orthogonal de $Z$ dans $\wedge^2 V$ pour la dualité canonique entre $\wedge^2 V$ et $\wedge^2 V^*$ et soit $B = V \oplus \wedge^2 V/Z^0$. Sur $B$, le crochet $\left[(v,\overline{u}),(v',\overline{u'})\right] = (0, \overline{v_A v'})$, où $-$ signifie passage au quotient par $Z^0$ munit $B$ d'une structure d'algèbre de Lie $2-$nilpotente dont l'idéal dérivé est $\wedge^2 V/Z^0$, canoniquement isomorphe à $Z$ et dont le centre $ZB$ est la somme directe de $\wedge^2 V/Z^0$ et de $Rad\ Z = \cap_{u \in z} Radu$ appelé radical de $Z$. On voit donc que

**Proposition 1.5.** *Il y a une correspondance naturelle entre sous-espace vectoriels de $\wedge^2 V^*$ de radical nul et algèbres de Lie 2−nilpotentes $A = V \oplus DA$, où $ZA = DA$.*

*La dimension du sous-espace $Z$ de $\wedge^2 V^*$ est celle de $DA$ et la classification des algèbres de Lie 2−nilpotentes revient donc à l'étude de l'action de $Gl(V)$ sur les grasmanniennes $Gr_r( \wedge^2 V)$, $r = 1, \ldots,$ éventuellement restreinte à l'ouvert $Gr'_r(V)$ de cette grasmannienne formé des sous-espaces de radical nul.*

**1.6. Invariant de Scheuneman.** Nous définirons cet invariant seulement si $\dim V$ est paire et on la notera $2n$. En effet, choisissant une base $B$ de $V$, $\wedge^2 V^*$ s'identifie au sous-espace $M$ de $M_{2n}(K)$ des matrices alternées : on sait alors que pour tout $M \in M$, $détM = (PfM)^2$ le pfaffien de la matrice $M$ ([1] §5). Cela peut aussi s'obtenir à l'aide des puissances divisées de $\oplus_{k\geq 1} \wedge^{2k} V^*$ : si à $M$ correspond $u = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_{ij} e_i^* \wedge e_j^*$, $u^n = n! Pf(m_{ij}) e_1^* \wedge \ldots \wedge e_{2n}^*$ ([1] et [10]) : ce pfaffien est un polynôme homogène de degré $n$ en les $m_{ij}$. L'invariant de Scheuneman, défini à une constante multiplicative près, d'un sous-espace $Z$ de dimension $r$ de $\wedge^2 V^*$ se définit alors de la façon suivante. On prend une base $M_1, M_2, \ldots, M_r$ de $Z$. L'élément général $M$ de $Z$ s'écrit $\sum_{i=1}^r x_i M_i$ et $Pf(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_r) e_i^* \wedge \ldots \wedge e_{2n}^*$ : $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ est un polynôme homogène de degré $n$ à $r$ variables, défini à un changement de variables linéaires près dans $Z$ et à une constante multiplicative près.

**Théorème 1.6.** *Deux algèbres de Lie 2−nilpotentes isomorphes ont même type et leurs invariants de Scheuneman sont des formes polynômes équivalentes.*

La réciproque est fausse comme dans [8], car deux algèbres non isomorphes peuvent avoir même invariant de Scheuneman. C'est aussi ce que montre la colonne $\gamma_3$ du tableau de la proposition 2-2 : $H_1$ et $H_3$ (resp $H_4$ et $H_5$) donnent des algèbres de Lie 2−nilpotentes non isomorphes ayant même invarint. Dans [8], la situation a été complètement décrite pour $\dim V = 4$ mais le cas général est hors de portée. On se bornera donc à envisager le cas où $DA$ est de dimension 2 et 3.

## 2. Classification des algèbres dont l'édéal dérivé est de petite dimension

**2.1.** Le cas où $\dim DA = 1$ est bien connu et facile : alors l'algèbre $A$ est produit direct de l'agèbre de Heisenberg $H_k$ de dimension $2k + 1$ et d'une algèbre abélienne. L'algèbre $H_k$ a pour base $e_i, 1 \leqslant i \leqslant 2k$ et $f$ avec $[e_{2j-1}, e_j] = f$ pour $j \in \{1, \ldots, k\}$, tous les autres crochets étant nuls; cela correspond à prendre une droite $D = K\varphi \in \wedge^2 V^*$ où $\varphi$ est une forme bilinéaire alternée sur $V$ de rang $2k$ et où $\{e_i\}$ est une base symplectique pour $\varphi$. On suppose désormais $K$ algébriquement clos, le cas général peut parfois être abordé par descente.

Dans le cas où $\dim DA = 2$, et $\dim V = 2n$, l'invariant de Scheuneman est une forme binaire de degré $n$ : le cas $n = 2$ donne deux algèbres non isomorphes

$H_1 \times H_1$ et l'algèbre $L_6$ de base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2\}$ avec $[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = f_1$ et $[e_1, e_3] = f_2$ dont l'invariant de Scheuneman est une forme quadratique de rang 1.

Quand $n = 3$ , l'invariant de Scheuneman est une forme binaire cubique : il y a quatre possibilités suivant que $f$ est produit de 3 formes linéaires distinctes, 2 formes linéaires dont l'une est double, $f$ est un cube ou $f = 0$. Les résultats en sont donnés dans [9] où une forme normale des sous-espaces vectoriels de $\wedge^2 K^6$ est donnée. Il y a six classes d'isomorphismes de plan $H$ dans $\wedge^2 K^6$ de radical nul dont on donne une base $\{f_1, f_2\}$ dans une base $\{e_i\}$ de $K^6$. Ici on voit que l'invariant de Scheuneman ne suffit pas toujours à distinguer des algèbres de Lie $2-$nilpotentes non isomorphes.

**Proposition 2.1.** *Sur un corps $K$ de caractéristique différente de 2 et 3, $\wedge^2 K^6$ admet sept types de sous-espaces vectoriels de dimension 2 et de rang maximal donnés par une base $\{u_1, u_2\}$, on désigne par $\{e_1, \ldots, e_6\}$ une base de $K^6$*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $H_1$ | $u_1 = e_1e_3 + e_2e_4$ | $u_2 = e_1e_5 + e_2e_6$ | $0$ |
| $H_2$ | $u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6$ | $u_2 = e_1e_2$ | $x^3$ |
| $H_3$ | $u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6$ | $u_2 = e_1e_2 + e_3e_4$ | $x^3$ |
| $H_4$ | $u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$ | $u_2 = e_1e_3 + e_5e_6$ | $x^2y$ |
| $H_5$ | $u_1 = e_1e_2$ | $u_2 = e_3e_4 + e_5e_6$ | $x^2y$ |
| $H_6$ | $u_1 = e_1e_2 + e_5e_6$ | $u_2 = e_1e_2 + e_3e_4$ | $xy(x+y)$ |
| $H_6(p,q)$ | $u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6$ | $u_2 = e_1(e_4 + pe_5) + e_2e_6 + qe_3e_5$ | $x^3 + pxy^2 + qy^3$ |

La dernière colonne donne l'invariant $\gamma_3(xu_1 + yu_2)$ sur la base $e_1e_2e_3e_4e_5e_6$ de $\wedge^6 K^6$, $\gamma_3 : H_i \to \wedge^6 K^6 \simeq K$ est un polynôme homogène du troisième degré $\gamma_3(xu_1 + yu_2)$.

Le résultat est connu sur un corps algébriquement clos ([9]), dans ce cas $\wedge^2 K^6$ admet six types $H_i, 1 \leq i \leq 6$. Si $K$ n'est pas algébriquement clos, en caractéristique différente de 2 et 3, seule le cas de $H_6$ fournit des $K-$formes non triviales $H_6(p,q)$ en bijection avec l'ensemble des $K-$formes binaires cubiques de discriminant non nul à changement de variables et homothétie prés. En caractiristique 2 ou 3, si $K$ n'est pas parfait, il y a également des $K-$formes pour $H_2, H_3, H_4$ et $H_5$.

Il n'y a donc, qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie 2-nilpotentes de dimension 8 dont l'idéal dérivé est de dimension au plus 2.

Le cas général avec $\dim DA = 2$, sur un corps algébriquement clos, se traite de la même manière et on a le

**Théorème 2.2.** *Soit $H$ un plan de $\wedge^2 K^{2n}$ dont l'invariant $\gamma_n$ est une forme binaire à racines distinetes . Alors il existe une base $\{e_i\}, 1 \leq i \leq 2n$ de $K^{2n}$ et des scalaires $\lambda_4, \ldots, \lambda_n \notin \{0, 1\}$ tels que $H$ a une base :*

$u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + \cdots + e_{2n-3}e_{2n-2}$
$u_2 = \quad\quad e_3e_4 + \lambda_4e_5e_6 + \cdots + \lambda_ne_{2n-3}e_{2n-2} + e_{2n-1}e_{2n}\,.$

Le résultat est connu; on voici une démonstration simple, par récurrence sur $n$. Si $n = 2$ (ou $3$ ), le résultat est dans [9] (ou proposition 2.2, on a $H_6$ ).

Supposons $n \geqslant 4$ et $\gamma_n(xu_1 + yu_2) = f_n(x, y)$ l'invariant de $H$. Par une transformation linéaire sur $u$ et $v$ , on peut supposer que les racines de $f_n$ sont $0, -1, \infty, -\lambda_4, -\lambda_5, \ldots, -\lambda_n$ de sorte que $f_n(x, y) = xy(x+y)(x+\lambda_4y)\cdots(x+\lambda_ny)$. Comme $f_n(x, 0) = 0, u_1$ est de rang inférieur à $2n$ ; si son rang n'était pas $2n-2$ , $f_n(x, y)$ serait divisible par $y^2$ car $\gamma_n(xu_1+yu_2) = \sum_{p=0}^n x^py^{n-p}\gamma_p(u_1)\gamma_{n-p}(u_2)$ . Il en résute que $u_1$ est de rang $2n-2$ et soit $P = vect\,\{f_{2n-1}, f_{2n}\}$ un supplémentaire de $S_{u_1}$ dans $K^{2n}$ : on peut écrire $u_2 = \alpha f_{2n-1}f_{2n} - f_{2n}z - tf_{2n-1} + v$ où $t$ , $z \in S_{u_1}$ et où $S_v \subset S_{u_1}$ . Le scalaire $\alpha$ n'est pas nul et on peut donc supposer $\alpha = 1$. Alors $u_2 = (f_{2n-1}+z)(f_{2n}+t)+v'$ où $S_{v'} \subset S_{u_1}$ et $xu_1+yu_2 = (xu_1+yv')+ye_{2n-1}e_{2n}$ : $\gamma_n(xu_1 + yu_2) = y\gamma_{n-1}(xu_1 + yv')e_{2n-1}e_{2n}$ et il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $vect\,\{u_1, v'\}$ plan de $\wedge^2K^{2n-2}$ (on a posé $e_{2n-1} = f_{2n-1} + z$ et $e_{2n} = f_{2n} + t$ ).

Les cas non génériques sont plus compliqués à traiter et trop nombreux pour être tous considérés. Il faut distinguer les multiplicités des racines, le cas le plus simple étant celui où $\gamma_n(xu_1 + yu_2) = x^{n-1}y$ , on peut alors trouver une base $\{e_i\}$ de $K^{2n}$ où $u_1 = \sum_{j<n} e_{2j-1}e_{2j}$ et il faut discuter suivant le rang de $u_2$ qui peut varier de $2$ à $2n - 2$.

Pour $2n = 8$ cela nous donne 3 possibilités pour $u_2$ qui sont : $e_7e_8, e_1e_3 + e_7e_8$ et $e_1e_3 + e_2e_5 + e_7e_8$. On a donc :
$u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6 \quad , \quad u_2 = e_7e_8$
$u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6 \quad , \quad u_2 = e_1e_3 + e_7e_8$
$u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6 \quad , \quad u_2 = e_1e_3 + e_2e_5 + e_7e_8$

Cela montre bien que le cas général est trop compliqué pour qu'il soit vraiment intéressant de donner toutes les possibilités.

**Remarque 2.3.** Le cas générique possède une propiété digne d'être signalée : Soit $H_1$ l'algèbre d'Heisenberg de dimension $3$ et $H_1^n$ le produit direct de $n$ exemplaires de $H_1$. C'est une algèbre de Lie $2-$nilpotente de dimension $3n$ dont l'invariant de Scheuneman est le polynôme homogène à $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ( par produit direct , les invariants de Scheuneman se multiplient ). Le théorème 2.2 nous dit que

**Proposition 2.4.** *Toute algèbre de Lie $2-$nilpotente de dimension $2n + 2$, d'idéal dérivé de dimension $2$ et dont l'invariant de Scheuneman est générique est le quotient de $H_1^n$ par un sous-espace $E$ de codimension $2$ de son idéal dérivé.*

En effet $H_1^n$ a pour base $\{e_1, \ldots, e_{2n}, f_1, \ldots, f_n\}$ avec $[e_{2k-1}, e_{2k}] = f_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Il suffit alors de prendre pour $E$ le sous-espace engendré par les

vecteurs $f_2 - f_1 - f_n$,
$f_3 - f_1 - \lambda_4 f_n, \ldots, f_{n-1} - f_1 - \lambda_n f_n$ pour obtenir l'algèbre générique de 2.3.

On peut alors déterminer le groupe des automorphismes et l'algèbre de Lie des dérivations de ces algèbres : il apparait d'abord que , à un groupe fini de permutations près des racines $\{0, 1, \infty, \lambda_i\}$ de l'invariant de Scheuneman, la restriction d'un automorphisme à l'idéal dérivé est une homothétie. Le sous-groupe des autmorphismes fixant $DA$ point par point induit un automorphisme de $A/DA$ qui laisse fixe chaque plan $vect\,\{e_{2k-1}, e_{2k}\}$ pour $k = 1, \ldots, n$ et les restrictions des automorphismes à ces plans sont des transformations de déterminant 1. Il reste encore le sous-groupe des transformations qui sont l'indentité sur $DA$ et induisent l'indentité sur $V = A/DA$ : ce groupe est isomorphe au groupe abélien $Hom(V, DA)$ . La dimension sur $K$ de l'algèbre $DérA$ ( ou dimension du groupe algébrique $Aut\ \ A$ ) est donc $7n + 1$.

## 3. Quelques remarques sur le cas général

**3.1.** On peut se demander quels sont les invariants de Scheuneman possibles pour une algèbre $2-$nilpotentes à $2n$ générateurs. Comme il s'agit de la classification des sous espaces de $\wedge^2 K^{2n}$, la dimension de $Gr_k(\ \wedge^2 K^{2n})$ est $k\,[n\,(2n-1) - k] = O(n^2)$. Or l'espace des polynômes homogènes de degré $n$ à $k$ variables est de dimension $C^{k-1}_{n+k-1}$ qui est $O(n^{k-1})$. Ainsi si $k \geqslant 4$, seule une sous-variété propre de cet espace fournit les invariants de Scheuneman des algèbres de Lie $2-$nilpotentes de type $(2n, k)$. Il ne reste donc plus que le cas $k = 3$ à étudier, celui de $k = 2$ étant réglé par le théorème 2-3.

**Théorème 3.1.** *Pour tout polynôme homogène $P$ de degré $n$ à 3 variables, il existe une $K-$algèbre $2-$nilpotente $A$ dont l'invariant de Scheuneman est $P$.*

Il s'agit de montrer qu'on peut trouver un sous-espace vectoriel $V$ de $\wedge^2 K^{2n}$ de dimension 3 tel que $Pf\ /_V$ est n'importe quel polynôme homogène à 3 variables. On remarque pour cela que si $M \in Mat_n(K)$ la matrice alternée $\begin{pmatrix} 0 & -{}^tM \\ M & 0 \end{pmatrix}$ a pour Pfaffien le déterminant de $M$. Il suffit alors de montrer que pour tout polynôme $f_n(x, y, z)$ homogène de degré $n$, il existe trois matrices $A, B$ et $C$ carrées d'ordre $n$ telles que $dét(xA + yB + zC) = f_n(x, y, z)$.
Comme on peut supposer, si $f_n \neq 0$, que $A$ par exemple, est inversible, on peut multiplier ces matrices par $A^{-1}$ et il s'agit de trouver deux matrices $B$ et $C$ carrées d'ordre $n$ telles que $dét(xI_n + yB + zC) = f_n(x, y, z)$. Le premier membre n'est autre, au signe près , que le polynôme caractéristique de la matrice $yB + zC$. On peut alors utiliser la théorie des matrices génériques [7] : on considère $Y = (Y_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $Z = (Z_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et on se place sur le corps $K(Y_{ij}, Z_{ij})$ des fractions rationnelles à $2n^2$ indéterminées : alors $dét(xI_n + yY + zZ)$ a pour coefficients des éléments algébriqements indépendants du corps $K(Y_{ij}, Z_{ij})^{GL_n(K)}$ où $GL_n(K)$ agit par conjugaison :
$P.Y_{ij} = (P^{-1}YP)_{ij}$ , $P.Z_{ij} = (P^{-1}ZP)_{ij}$ sur $K(Y_{ij}, Z_{ij})$. Ces coefficients étant

algébriquement indépendants, on peut, par spécialisation, leur donner toute valeur arbitraire donnée à l'avance, ce qui montre que tout polynôme $f_n$ peut être ainsi obtenu.

## 4. Algèbres de Lie 2-nilpotentes symplectiques

**Définition 4.1.** Un $2-$cocycles $\omega$ de $A$ à valeurs dans $K$, est une forme bilinéaire alternée vérifie $\omega([x,y],z)+\omega([y,z],x)+\omega([z,x],y)=0$ quels que soient $x,y$ et $z$ dans $A$.

L'espace des $2-$cocycles est noté $Z^2(A,K)$.

Un $2-$cobord $\omega$ de $A$ à valeurs dans $K$, est une forme bilinéaire alternée vérifie $\omega(x,y)=f([x,y])$ où $f\in A^*$.

L'espace des $2-$cobords est noté $B^2(A,K)$.

L'espace de cohomologie est $H^2(A,K)=Z^2(A,K)/B^2(A,K)$.

Une algèbre de Lie $A$ est dite symplectique, s'il existe un $2-$cocycles $\omega\in Z^2(A,K)$, non dégénérée.

A part la condition que l'algèbre est de dimension paire, il n'y a pas des condisions nécessaires ( ou suffisantes ) simples assurant q'une algèbre de Lie soit symplectique. Comme les algèbres $2-$nilpotentes $A$ sont particulierement maniables, on peut se demander s'il existe dans ce cas des critères permettant de savoir si $A$ est symplictique ou non . Par exemple, un calcul facile donne le resultat si $dimDA=1$.

**Proposition 4.2.** *Soit $A=H_k\times K^{2j+1}$ le produit direct de $H_k$ ( algèbre de Heisenberg de dimension $2k+1$) par une algèbre abélienne de dimension impaire : $A$ est symplectique si et seulement si $k=1$.*

Si $k=1$ , $A=H_1\times K^{2j+1}$, soient $\{g_1,\ldots,g_{2j+1}\}$ une base de $K^{2j+1}$ et $\{e_1,e_2,f\}$ une base de $H_1$ avec $[e_1,e_2]=f$. On calcul $d\omega(x,y,z)=\omega([x,y],z)+\omega([y,z],x)+\omega([z,x],y)=0$, pour $x,y,z\in\{e_1,e_2,f,g_1,\ldots,g_{2j+1}\}$. On trouve $\omega(f,f)=0$ ; $\omega(f,g_i)=0$, pour $i\in\{1,\ldots,2h+1\}$. Dans ce cas on peut trouver une forme bilinéaire alternée $\omega=e_1^*f^*+e_2^*g_1^*+\sum_{i=1}^{j}g_{2i}^*\ g_{2i+1}^*$ qui est non dégénérée, d'où $A$ est symplectique.

Si $k>1$, il existe une base $\{e_i\},i\in\{1,\ldots,2k+1\}$ de $A$ , avec :
$[e_1,\ e_2]=[e_3,\ e_4]=\cdots=[e_{2k-1},\ e_{2k}]=e_{2k+1}$ et tous les autres crochets de $A$ sont nuls. En appliquant la relation des cocycles avec $x=e_1,y=e_2,z=e_i$ où $i\geqslant 2$. puis $x=e_1$ ou $e_2$ et $(y,z)=(e_3,e_4)$ à $\omega\in Z^2(A,K)$ on voit que $e_{2k+1}\in Rad\ \omega$.

Le cas où $\dim D(A)=2$ est déja plus délicat puisque comme on le verra $H_1\times H_1$ est symplectique.

**4.3.** Soit $A$ une algèbre de Lie $2-$nilpotente, $x$ un élément non nul de $A$ . Le centralisateur $Z(x)$ de $x$ dans $A$, $\ker adx$, contient $Z(A)$, donc $D(A)$ ; c'est donc un idéal de $A$ et on désigne par $D_x$ son idéal dérivé, i.e. $D_x=[\ker adx,\ker adx]$.

Soit maintenant $A$ une $K-$algèbre de Lie, on définit les ensembles suivants :
$\Delta_1(A) = \bigcap\limits_{x\in A} D_x$ et
$\Delta_2(A) = \bigcap\limits_{\omega\in Z^2(A,K)} Rad\omega$
$\Delta_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $A$.

**Proposition 4.3.** *Pour toute $K-$algèbre de Lie $A$, on a* $\Delta_1(A) \subset \Delta_2(A) \subset Z(A)$

On a $Z(A) = \bigcap\limits_{\omega\in B^2(A,K)} Rad\omega$ : si $x \notin Z(A)$, $\exists y \in A$, $[x,y] \neq 0$ et $\exists f \in A^*$ tel que $f([x,y]) \neq 0$. i.e $d_f(x,y) \neq 0$, donc $x \notin Rad(d_f)$.
Soint $y \in \Delta_1(A)$ et $z \in A$. Comme $y \in D_x$ , il existe $u_i, v_i \in \ker adx$ tels que : $y = \sum_i [u_i, v_i]$, pour $\omega \in Z^2(A,K)$, $\omega(y,z) = \sum_i \omega([u_i,v_i],z) = -\sum_i [\omega(u_i,[v_i,x]) + (v_i,[x,u_i])] = 0$, car $[v_i,x] = [x,u_i] = 0$, donc $\omega(y,z) = 0$ et $\Delta_2(A)$ contient $\Delta_1(A)$.

**Corollaire 4.4.** *Si $\Delta_1(A) \neq \{0\}$, $A$ n'est pas symplectique.*

**Lemme 4.5.** *Soit $H_k$ l'algèbre de Heisenberg de dimension $2k+1$, alors: $\Delta_1(H_k) = Z(H_k)$ pour $k \geq 2$.*

Un simple calcul, donne $D_{e_i} = Z(H_k)$, pour tout $i$ $1 \leq i \leq 2k+1$. D'où $\Delta_1(H_k) = Z(H_k)$. Ceci montre bien, que pour $k \geq 2$, l'algèbre $A$ de 4-2, n'est jamais symplectique.

**Lemme 4.6.** *Une condition nécessaire pour que $A$ soit symplectique est que pour tout $\omega \in Z^2(A,K)$ on a $D(A) \perp_\omega Z(A)$.*

En effet, pour $z \in Z(A)$, la relation des cocycles donnent $\omega([x,y],z) = -\omega([y,z],x) - \omega([z,x],y) = 0$. Ce qui signifie que $D(A)$ est totalement isotrope et que :
$\dim D(A) + \dim Z(A) \leq \dim(A)$. On a donc le

**Lemme 4.7.** *Si $A$ est une algèbre de Lie $2-$nilpotente $(A \supset Z(A) \supset D(A))$ avec $\dim D(A) \gtrdot \frac{1}{2}\dim A$, $A$ n'est pas symplectique.*

**4.9.** Nous allons donner quelques exemples des algèbres de Lie $2-$nilpotentes symplectiques dont l'idéal dérivé est de petite dimension:

Cas $\dim D(A) = 2$ et $\dim V = 2n$ : pour $n = 2$, $A$ est de dimension $6$, alors
$A = H_1 \times H_1 = L_{6,2}$, l'algèbre de Lie générique pour ce type, est symplectique.

En effet, soit $\{e_1,e_2,e_3,e_4,f_1,f_2\}$ une base de $A$ avec $[e_1,e_2] = f_1$ ; $[e_3,e_4] = f_2$ . On remarque que $D_{e_i} = Kf_2$ , pour $i = 1,2$ et $Kf_1$, pour $i = 3,4$.

Dans ce cas $\Delta_1(A) = \{0\}$. Le calcul de $d\omega(x,y,z) = 0$, se fait simplement : $\omega(f_1,e_3) = \omega(f_1,e_4) = \omega(f_2,e_1) = \omega(f_2,e_2) = 0$. La forme bilinéaire alternée $\omega = e_1^*e_3^* + e_2^*f_1^* + e_4^*f_2^*$ est non dégénérée, car $\gamma_3(\omega) \neq 0$.
Si $A$ est l'algèbre $L_{6,3}$ de base $\{e_1,e_2,e_3,e_4,f_1,f_2\}$ avec $[e_1,e_2] = [e_3,e_4] = f_1$ et $[e_1,e_3] = f_2$, $A$ est encore symplectique : le même calcul donnent $\omega(f_1,e_3) = \omega(f_2,e_2), \omega(f_1,e_1) = \omega(f_4,e_2)$ et $\omega(f_1,e_4) = \omega(f_1,e_2) = \omega(f_1,f_2) = 0$. On vérifie que $\omega = e_2^*f_2^* + e_3^*f_1^* + e_1^*f_1^* + f_2^*e_4^* + e_3^*e_4^*$ où $\{e_i^*\}$ est la base duale de $\{e_i\}$, fait de $L_{6,3}$ une algèbre de Lie symplectique.

Pour $n = 3$ et $A$ est de dimension 8, on prend l'algèbre $A = H_k \times H_1$, $k = 2$. Soit $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,f_1,f_2\}$ une base de $A$ avec $[e_1,e_2] = [e_3,e_4] = f_1$ et $[e_5,e_6] = f_2$ où l'invariant de Scheuneman est $x^2y$, alors $D_{e_i} = D(A)$, pour $i \leq 4$ et $Kf_1$, pour $i = 5,6$. Dans ce cas $\Delta_1(A) = Kf_1 \neq \{0\}$, alors $A$ n'est pas symplectique. Ce résultat est vrai pour $k \geq 3$, dans ce cas $\dim A = 2k+4$ et $[e_1,e_2] = [e_3,e_4] = \cdots = [e_{2k-1},e_{2k}] = f_1$, $[e_{2k+1},e_{2k+2}] = f_2$. Alors $\Delta_1(A) = Kf_1 \neq \{0\}$.

Cas $\dim D(A) = 3$ et $\dim A = 6$ : on prend $A$ l'algèbre $L_{6,1}$ et soit $\{e_1,e_2,e_3,f_1,f_2,f_3\}$ une base de $A$ avec $[e_1,e_2] = f_3$, $[e_1,e_3] = f_2$ et $[e_2,e_3] = f_1$. Le calcul de $d\omega$ donnent : $\omega(f_3,e_3) + \omega(f_1,e_1) - \omega(f_2,e_2) = 0$, la $2-$ forme sur $L_{6,1}$, $\omega = e_1^*f_1^* + e_2^*f_2^* + e_3^*f_1^* + e_1^*f_3^*$ fait de $L_{6,1}$ une algèbre symplectique .

**Proposition 4.8.** *Les algèbres données par le théorème 2.2 où $n \geq 3$, c'est-à-dire de dimension supérieure ou égale à 8 et d'idéal dérivé de dimension 2 ne sont pas symplectiques.*

Soit $\{e_1,e_2,\ldots,e_{2n},g_1,g_2\}$ une base de $A$ avec $[e_1,e_2] = g_1$, $[e_3,e_4] = g_1+g_2$, $[e_5,e_6] = g_1+\lambda_4 g_2$, $\ldots, [e_{2n-3},e_{2n-2}] = g_1+\lambda_n g_2$ et $[e_{2n-1},e_{2n}] = g_2$.
On a $Z(e_{2i-1}) = (\oplus_{j\neq 2i}Ke_j) \oplus D(A)$ et $Z(e_{2i}) = (\oplus_{j\neq 2i-1}Ke_j) \oplus DA$, alors $D_{e_{2i}} = D_{e_{2i-1}} = D(A)$, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, ce qui prouve que $\Delta_1(A) = D(A) \neq \{0\}$. D'où le résultat et la nécessité de la condition $n \geq 3$.

Nous allons donner une façon générale d'aborder la question suivante:
**4.11.** Soit $n$ et $r$ deux entiers naturels et $A$ l'anneau des polynômes aux $rC_n^2$ indéterminées $\mathbb{Z}\left[X_{ij}^k\right]$ où $1 \leq i < j \leq n$ et $1 \leq k \leq r$. On désigne par $K$ son corps des fractions et $B$ un sous-anneau de $K$ contenant $A$. Sur le $B-$module $B^{n+r}$ de base canonique $\{e_i;f_k\}, 1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq r$, on définit le crochet de Lie, $[e_i,e_j] = \sum_{k=1}^r X_{ij}^k f_k, [e_i,e_k] = [e_k,e_l] = 0$ pour $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k \leq l \leq r$ et on note $\mathcal{L}_B$ cette algèbre de Lie dont le centre a pour base $\{f_1,\ldots,f_r\}$.

Pour $j = 2,\ldots,r+1$, on a $[e_1,e_j] = \sum_{k=1}^r X_{1j}^k f_k = f'_{j-1}$ et soit $\Delta = dét\left(X_{1j}^k\right)$, c'est un élément non nul de $A$ et on suppose que $\Delta^{-1} \in B$, de sorte que $\{f'_1,\ldots,f'_r\}$ est une base de $B-$ module $Z(\mathcal{L}_B)$ égal à $D(\mathcal{L}_B)$, engendrié par $\{f_1,\ldots,f_r\}$. Ainsi $f_\alpha = \sum_{\beta=1}^r y_{\alpha\beta}e_{\beta+1}$, $\left[e_1,e'_{\alpha+1}\right] = f_\alpha$. Dans la base $\left\{e_1,e'_2,\ldots,e'_{r+1},e_{r+2},\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_r\right\}$ de $\mathcal{L}_B$, on a $[e_1,e'_i] = f_{i-1}$ pour $i = 2,\ldots,r+1$ et $[e_1,e_j] = \sum_{k=1}^r X_{1j}^k f_k$ pour $j \geq r+2$, d'où $\left[e_1, e_j - \sum_{k=1}^r X_{1j}^k e'_{k+1}\right] =$

0 pour $j \geq r+2$. Cela montre que $\ker ade_1$ est le $B-$module libre de base $\left\{e_1, e_j - \sum_{k=1}^{r} X_{1j}^k e'_{k+1}, f_1, \ldots, f_r\right\}$ où $j \geq r+2$.

On cherche à trouver des conditions suffisantes sur $n$ et $B$ pour que : $D_{e_1} = [Ker\ ade_1, Ker\ ade_1]$ soit égal à $D(\mathcal{L}_B) = Z(\mathcal{L}_B)$. Soit alors $I$ l'idéal de $B$ engendré par les indéterminies $X_{1j}^k$ où $r+2 \leq j \leq n$ et $1 \leq k \leq r$ et $C = B/I$. Dans $\mathcal{L}_C$, $\left[\overline{e_j - \sum_{k=1}^{r} X_{1j}^k e'_{k+1}}, \overline{e_h - \sum_{k=1}^{r} X_{1h}^k e'_{k+1}}\right] = [\overline{e_j}, \overline{e}_h]$, la barre $-$ signifiant qu'on a réduit modulo l'idéal $I$, et c'est $\sum_{k=1}^{r} \overline{X}_{jh}^k \overline{f_k}$. On suppose maintenant que $C_{n-r-2}^2 \geqslant r$ : alors on peut extraire des crochets $[\overline{e_j}, \overline{e}_h]$, $r$ crochets dont le déterminant $\Delta' = \left|\overline{X}_{jh}^k\right|$ est non nul dans $C$ . Cela signifie que le déterminant des composants vis à vis de $\{f_1, \ldots, f_r\}$ des $r$ crochets $\left[e_j - \sum_{k=1}^{r} X_{1j}^k e'_{k+1}, e_h - \sum_{k=1}^{r} X_{1h}^k e'_{k+1}\right]$ n'est pas dans l'idéal $I$ et donc c'est un élément non nul $\Delta_1$ de $B$ . Supposons, comme précédement, que $\Delta_1^{-1} \in B$ : cela montre que $D_{e_1} = Z(\mathcal{L}_B)$. Ce résultat étant vrai pour $B$ l'est également pour $K$. Il en résulte que dans $\mathcal{L}_K$ , on a quelque soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ , $D_{e_i} = Z(\mathcal{L}_K) = D(\mathcal{L}_K)$, et ainsi l'invariant $\Delta$ de $\mathcal{L}_K$ est égal à l'idéal dérivé de $\mathcal{L}_K$.

Soit alors $\omega$ un $2-$cocycle scalaire sur $\mathcal{L}_K$ , $\omega \in Z^2(\mathcal{L}_B, K)$ : tout élément $f \in D(\mathcal{L}_K)$ peut s'écrire $f = \sum_\alpha \lambda_{\alpha,i}[u_{\alpha,i}, v_{\alpha,i}]$ où $u_{\alpha,i}$ et $v_{\alpha,i}$ sont dans $\ker ad\, e_i$. Alors
$\omega(e_i, f) = \sum_\alpha \lambda_{\alpha,i}\omega(e_i, [u_{\alpha,i}, v_{\alpha,i}])$.
Comme $\omega(e_i, [u_{\alpha,i}, v_{\alpha,i}]) = -\omega(u_{\alpha,i}, [v_{\alpha,i}, e_i]) - \omega(v_{\alpha,i}, [e_i, u_{\alpha,i}]) = 0$ , $\omega(e_i, f) = 0$.
De plus $\omega(f_i, f) = \omega\left(\left[e_1, e'_{j+1}\right], f\right) = -\omega\left(\left[e'_{j+1}, f\right], e_1\right) - \omega\left([f, e_1], e'_{j+1}\right) = 0$ car $f \in Z(\mathcal{L}_K)$. Il en résulte que le radical de $\omega$ contient $D(\mathcal{L}_K)$ ; inversement toute forme bilinéaire alternée $\varphi$ sur $\mathcal{L}_K$ dont le radical contient $D(\mathcal{L}_K)$ est un $2-$cocycle scalaire car chacun des termes $\varphi(x, [y, z])$ de la relation des cocycles est nul. On a ainsi obtenue le résultat suivant

**Théorème 4.9.** *Sur $\mathcal{L}_K$, une forme bilinéaire alternée est un $2-$cocycle si et seulement si son radical contient $D(\mathcal{L}_K)$ : $Z^2(\mathcal{L}_K, K) \simeq \wedge^2(\mathcal{L}_K/D(\mathcal{L}_K))^*$.*

Comme $B^2(\mathcal{L}_K, K) \simeq D(\mathcal{L}_K)^*$, on obtient une description du groupe $H^2(\mathcal{L}_K, K)$ et $\dim H^2(\mathcal{L}_K, K) = C_n^2 - r$. La condition sur le couple d'entiers $(n, r)$ satisfaite dés que $n \geq r + \sqrt{2r} + 2$. Comme conséquence on a

**Corollaire 4.10.** *Sur $\mathbb{C}^{n+r}$ où $n$ et $r$ verifiant la condition $n$ un peu grand par rapport à $r$ , dans un ouvert de Zariski de l'ensemble des structures d'algèbres de Lie $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{r} a_{ij}^k f_k$ , les $a_{ij}^k \in \mathbb{C}$ sont algébriquement independants car $\mathbb{C}$ est de degré de transendance $\infty$ sur $\mathbb{Q}$ , donc les algèbres de Lie $L$, $2-$nilpotentes correspondant aux points de cet ouvert vérifie $\Delta L = DL$ de dimension $r$, donc pas de structure symplectique et $\dim H^2(L, \mathbb{C}) = C_n^2 - r$ est constant sur cet ouvert.*

**Corollaire 4.11.** *Les algèbres de Lie $2-$nilpotentes définie par la proposition 2.1 ne sont pas symplectiques.*

## 5. Classification des algèbres de Lie 2-nilpotentes symplectiquede dimension $\leq$ 6

Toute algèbre de Lie $2-$nilpotente symplectique de dimension inferieure ou égale à 6 est l'un des types suivant:

**Dimension 2.** $K^2$,
**Dimension 4.** $K^4$, $H_1 \times K$,
**Dimension 6.** $K^6$, $H_1 \times K^3$,

$H_1 \times H_1 = L_{6,2} \quad (D(A) = Z(A))$

$L_{5,1} \times K$ où $L_{5,1} = \{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2\}$, avec $[e_1, e_2] = f_1$ et $[e_1, e_3] = f_2$

$L_{6,1} \quad (D(A) = Z(A))$

$L_{6,3} \quad (D(A) = Z(A))$

**Remerciements.** Je remercie vivement M. Philippe Revoy pour les nombreuses conversations qui m'ont permis d'approfondir ces questions.

### Références

[1] Bourbaki, N. ≪Algèbre, chapitre 9≫, Hermann, Paris, 1959.

[2] Gauger, M. A., *On the classification of metabelian Lie algebra (1)*, Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973), 293–329.

[3] Midoune, N., and L. Noui, *Maximal complexity of trivectors*, African Diaspora Journal of Mathematics **4** (2007), 35–46.

[4] —, *K-Forms of 2-Step Splitting Trivectors*, Intern. J. of Algebra **2** (2008), 369–382.

[5] Noui, L., et Ph. Revoy, *Algèbres de Lie orthogonales et formes trilinéaires alternées*, Comm. in Algebra **25** (1997), 617–622.

[6] Parkhomenko, S. E., *Quasi-Frobenius Lie algebra constructions of N=4 superconformal field theories*, Mod. Phys. Lett. A **11**(1996), 445–461.

[7] Procesi, C., *Rings with polynomial identities*, Marccel Dekker, New-York, 1973.

[8] Revoy, Ph., *Algèbre de Lie métabéliennes*, Ann. Faculté des Sciences Toulouse **II** (1980), 93–100.

[9] —, *Trivecteurs de rang 6, in coll. Sur les formes quadratiques*, Bull. Soc. Math. Fr. **59** (1979), 141–155.

[10] —, *Formes alternées et puissances divisées* , Sém. P. Dubreil , 26éme année, 1972-73, n°8, 10p.

[11] Scheuneman, J., *Two-step nilpotent Lie algebras*, J. of Algebra **7** (1967), 152–159.

[12] Stolin, A., *Rational solutions of the classical Yang-Baxter equation and quasi Frobenius Lie algebras*, J. Pure Appl. Algebra **137** (1999), 285–293.

Noureddine Midoune
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics
and Informatic
LPMA
M'Sila University, Algeria
midounenour@yahoo.fr

Received February 15, 2010
and in final form July 20, 2012