Journal of Lie Theory
Volume **23** (2013) 1161–1189

Restriction des séries discrètes de $SU(2,1)$ à un sous-groupe de Borel

Gang Liu

Communicated by J. Hilgert

Abstract. We give an explicit description of the restriction of the discrete series of $SU(2,1)$ to a minimal parabolic subgroup.
Mathematics Subject Classification 2010: 22E30.
Key Words and Phrases: Branching laws, discrete series.

1. Introduction

Dans cet article, on obtient la décomposition explicite de la restriction d'une série discrète π de $G = SU(2,1)$ à un sous-groupe de Borel B et à son sous-groupe exponentiel maximal B_1. Ce résultat peut être considéré comme la partie analytique de la conjecture de Duflo pour $(SU(2,1), B)$ et $(SU(2,1), B_1)$: la partie géométrique est traitée dans [10]. Pour plus de détails sur cette conjecture, on renvoie à [9] et [10].

Pour obtenir ce résultat, nous utilisons la réalisation des séries discrètes dans un espace de formes harmoniques, suivant les travaux de Narasimhan-Okamoto ([11]) et Hersant ([3]). D'autre part, la formule de Plancherel pour B ne fait apparaître que des séries discrètes. Suivant Schmid ([14]), nous montrons alors que la restriction d'une série discrète π de G à B se décompose en somme directe hilbertienne de séries discrètes de B et que, pour chaque série discrète de B, sa multiplicité est donnée par la dimension d'un espace de cohomologie relative réalisé, suivant Hersant ([3]), dans un espace de formes harmoniques. Nous montrons que cet espace de cohomologie s'identifie à l'espace des solutions d'un système différentiel linéaire ordinaire sur $]0, +\infty[$ qui sont de carré intégrable pour la mesure de Haar $\frac{dt}{t}$. On en déduit immédiatement que π est B-admissible (au sens de Kobayashi). Lorsque π est une série discrète holomorphe ou anti-holomorphe, ces systèmes différentiels sont particulièrement simples à étudier et nous retrouvons alors aisément les résultats de [13] (Theorem 5.22) pour le cas $SU(2,1)$.

Par contre, lorsque π n'est ni holomorphe ni anti-holomorphe, ces systèmes différentiels présentent deux singularités dont l'une de deuxième espèce, phénomène à notre connaissance rarement rencontré jusqu'ici en théorie des repré-

ISSN 0949–5932 / $2.50

sentations. Du coup, le calcul de la dimension de l'espace de leurs solutions qui sont de carré intégrables pour la mesure $\frac{dt}{t}$ s'avère très difficile directement. Cependant, en combinant nos résultats avec ceux de Fabec ([2]) et de Kraljeviĉ ([7], [8]), on parvient à obtenir la décomposition explicite de $\pi|_B$. En retour, nous obtenons les informations cherchées sur l'espace des solutions de ces systèmes différentiels.

Maintenant on énonce les principaux théorèmes :

Tout d'abord, soit $M \subset B$ un tore anisotrope maximal. Alors, M est de dimension 1 de sorte que son dual unitaire $\hat{M}$ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}$. On se donne un isomorphisme $m \to \sigma_m$ de $\mathbb{Z}$ sur $\hat{M}$. Enfin, on a $B = MB_1$, produit semi-direct.

Théorème 1.1.

$$\pi_\lambda|_B \cong \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left[\dim((\mathfrak{H}_{\lambda,-})^{q_\lambda}_{\sigma_m})\mathrm{T}_{m,+} \oplus \dim((\mathfrak{H}_{\lambda,+})^{q_\lambda}_{\sigma_m})\mathrm{T}_{m,-}\right].$$

Ici π_λ est une série discrète de G dont le paramètre de Harish-Chandra est λ, $\mathfrak{H}_{\lambda,\pm}$ est un espace cohomologie relative pour le groupe B_1 réalisé dans un espace de q-formes harmoniques (voir le numéros 2 et 4), $(\mathfrak{H}_{\lambda,-})^q_{\sigma_m}$ désigne le sous-espace des q-formes harmoniques qui sont de poids σ_m sous l'action naturelle de M et $q_\lambda \in \{0, 1, 2\}$. Les $\mathrm{T}_{m,\pm}$ sont les représentations irréductibles de B qui interviennent dans la formule de Plancherel (en fait des séries discrètes). Lorsque π_λ est holomorphe (resp. anti-holomorphe), $q_\lambda = 0$ (resp. $q_\lambda = 2$). Lorsque π_λ n'est ni holomorphe ni anti-holomorphe, $q_\lambda = 1$. Si π_λ est holomorphe ou anti-holomorphe, les nombres $\dim((\mathfrak{H}_{\lambda,\pm})^{q_\lambda}_{\sigma_m})$ sont faciles à calculer directement. Si π_λ n'est ni holomorphe ni anti-holomorphe, on peut déduire du théorème précédent le théorème suivant :

Théorème 1.2. *Pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe, on a que*

$$\pi_\lambda|_B \cong \sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D^-_{\lambda,m})^\infty).\mathrm{T}_{[3m-\frac{(3f_\lambda(H)+f_\lambda(Z))}{2}],+} \oplus$$
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D^+_{\lambda,m})^\infty).\mathrm{T}_{[-(3m+\frac{f_\lambda(Z)-3f_\lambda(H)}{2})],-}.$$

La donnée de λ détermine un sous-groupe de Cartan compact de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ et un sous-groupe compact maximal K d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ contenant $\mathfrak{t}$. Alors, $f_\lambda = -i\lambda \in \mathfrak{t}^*$ est le paramètre de Duflo pour la série discrète π_λ, H est la coracine pour le choix d'un système de racines positives de $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ dans $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ et Z est un générateur bien choisi du centre de $\mathfrak{k}$. Les nombres $f_\lambda(H)$ et $f_\lambda(Z)$ sont alors des entiers. De plus chaque $(D^\pm_{\lambda,m})^\infty$ est l'espace des solutions d'un système différentiel linéaire ordinaire sur $]0, +\infty[$ qui sont de carré intégrable pour la mesure de Haar $\frac{dt}{t}$. Cela dit, il est difficile de calculer $\dim((D^\pm_{\lambda,m})^\infty)$ directement (le système différentiel présente deux sigularités, dont l'une de deuxième espèce). Cependant, en combinant les théorèmes précédents avec des résultats de Fabec et ceux de Kraljeviĉ, on parvient à décomposer $\pi_\lambda|_B$ explicitement:

Théorème 1.3. *Pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe, on a que*

$$\pi_\lambda|_B \cong \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{T}_{[3m+\frac{3f_\lambda(H)-f_\lambda(Z)}{2}],+} \oplus \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{T}_{[-(3m+\frac{3f_\lambda(H)+f_\lambda(Z)}{2})],-}.$$

On en déduit pour les espaces $(D^{\pm}_{\lambda,m})^{\infty}$ la conséquence suivante :

Proposition 1.4.

$$dim((D^{\pm}_{\lambda,m})^{\infty}) = 0, \quad si \;\; 0 \leqslant m \leqslant f_\lambda(H) - 1$$

et

$$dim((D^{\pm}_{\lambda,m})^{\infty}) = 1, \quad si \;\; m \geqslant f_\lambda(H).$$

Comme indiqué plus haut, ce résultat semble difficile à obtenir par des méthodes "directes".

2. Réalisation des séries discrètes d'un groupe de Lie simple et hermitien dans des espaces de formes harmoniques

Dans cette section, on va rappeler des éléments sur la construction des séries discrètes d'un groupe simple hermitien par la méthode des formes harmoniques. Plus précisément, en 1982, Hersant ([3]) a construit les "formes harmoniques et les modules de cohomologie relative des algèbres de Lie" généralisant certaines constructions de Schmid ([14], [15]), Narasimhan-Okamoto ([11]). Dans la suite, on va d'abord rappeler la construction de Hersant, puis expliquer comment elle généralise celle de Narasimhan-Okamoto. Ensuite, dans les sections suivantes, on va appliquer cette construction à la décomposition de la restriction des séries discrètes de $SU(2,1)$ à un sous-groupe de Borel.

2.1. Rappel de la théorie de Hersant [3].

Soient G un groupe de Lie réel, K et Z deux sous-groupes fermés de G qui vérifient: (1) Z est inclus dans le centre de G. (2) Z est inclus dans K, et K/Z est compact. Soient $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{z}$ les algèbres de Lie correspondantes, et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{z}_{\mathbb{C}}$ leurs complexifiées respectives.

Supposons qu'il existe une sous-algèbre complexe $\mathfrak{e}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ qui est stable par l'action adjointe de K, et telle que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{e} + \overline{\mathfrak{e}}$ et $\mathfrak{e} \bigcap \overline{\mathfrak{e}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ (ici "$^-$" désigne la conjugaison dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ par rapport à la forme réelle $\mathfrak{g}$).

Soit V un $(\mathfrak{e}, K)$-module de dimension finie qui est K-unitaire : c'est-à-dire que V est l'espace d'une représentation unitaire τ de dimension finie de K et d'une représentation notée τ aussi, de $\mathfrak{e}$ vérifiant

$$\forall k \in K, \forall x \in \mathfrak{e}, \tau(\mathrm{Ad}k.x) = \tau(k)\tau(x)\tau(k^{-1}), \text{et } \forall x \in \mathfrak{k}, \tau(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tau(\exp tx).$$

Supposons de plus que Z agit scalairement dans V suivant le caractère χ.

Maintenant soit π une représentation unitaire de G dans $\mathbb{H}$. On note aussi π la représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (et de son algèbre enveloppante universelle) dans $\mathbb{H}^\infty$ (ici $\mathbb{H}^\infty$ est le sous-espace des vecteurs C^∞ de π dans $\mathbb{H}$).

Notons (τ^*, V^*) la représentation contragrédiente de (τ, V). Soit

$$\Lambda(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty = \oplus_p \Lambda^p(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty$$

le $\mathfrak{e}$-complexe standard à valeurs dans $V^* \otimes \mathbb{H}^\infty$ (par rapport à $\tau^* \otimes \pi|_{\mathfrak{e}}$). Notons ∂ le cobord standard de Hoschild-Serre pour $\Lambda(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty$, et $\Theta = \mathrm{Ad}^* \otimes \tau^* \otimes \pi$ la représentation de K dans $\Lambda(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty$ définie par: $(\Theta(k)\omega)(X_1, ..., X_p) = (\tau^*(k) \otimes \pi(k)).\omega(\mathrm{Ad}k^{-1}X_1, ..., \mathrm{Ad}k^{-1}X_p)$ où $k \in K$ et $\omega \in \Lambda^p(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty$ est une p-forme. On peut vérifier facilement que les opérateurs $\Theta(k)$ commutent au cobord ∂.

Considérons le sous-espace de $\Lambda(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty$ constitué des formes ω telles que $i(X)\omega = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, où $(i(X)\omega)(Y_1, ..., Y_{p-1}) = \omega(X, Y_1, ..., Y_{p-1})$ pour ω une p-forme. Cet espace s'identifie naturellement à

$$\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty$$

qui est stable par la représentation Θ. Notons

$$[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K = \{\omega \in \Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty \mid \Theta(k)\omega = \omega, \forall k \in K\}.$$

On peut vérifier que $[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K$ est stable par l'opérateur ∂, on définit donc par restriction de ∂, un sous-complexe que l'on note

$$[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K \xrightarrow{\partial_K} [\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K. \tag{1}$$

Puisque K/Z est supposé compact, $\mathrm{Ad}K$ est un groupe compact. Donc sur $\Lambda(\mathfrak{e}^*)$ (ainsi que sur $\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*)$), il y a un produit scalaire $\mathrm{Ad}K$-invariant. Ainsi l'espace $\Lambda(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}$ a une structure naturelle de produit tensoriel hilbertien, pour laquelle la représentation Θ de K est unitaire.

Hersant a démontré les assertions qui suivent. Le sous-espace que l'on note $[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}]^K$ des vecteurs invariants par $\Theta(K)$ est l'adhérence de l'espace $[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K$ dans $\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}$. L'opérateur $[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K \xrightarrow{\partial_K} [\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K$ a un adjoint formel δ_K sur le même espace. De plus si on pose $\Box_K = \partial_K \delta_K + \delta_K \partial_K$, alors

$$[\mathrm{Im}(\partial_K + \delta_K)]^\perp = \ker(\partial_K) \cap \ker(\delta_K) = \ker \Box_K,$$

où $[\mathrm{Im}(\partial_K + \delta_K)]^\perp$ est l'orthogonal de $\mathrm{Im}(\partial_K + \delta_K)$ dans $[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}]^K$. En particulier, $\ker(\partial_K) \cap \ker(\delta_K)$ est fermé dans $[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}]^K$. Enfin, on a $\ker(\partial_K) = \ker \Box_K \oplus [\mathrm{Im}\partial_K]_\infty$, où $[\ \ ]_\infty$ désigne l'adhérence dans l'espace de Fréchet $[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K$. On en déduit en particulier que $\ker \Box_K$, muni de la topologie induite par celle d'espace de Hilbert de $[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}]^K$, est homéomorphe au quotient d'espaces de Fréchet $\ker(\partial_K)/[\mathrm{Im}\partial_K]_\infty$. Si de plus les espaces de cohomologie du complexe (1) sont de dimension finie, $\mathrm{Im}\partial_K$ est fermé pour la topologie de Fréchet et $\ker \Box_K$ est isomorphe à l'espace de cohomologie relative $\ker(\partial_K)/\mathrm{Im}\partial_K$.

Pour simplifier, on appelle le sous-complexe construit ci-dessus le *"complexe de Hersant" et on le note* $C^*(\mathfrak{e}, V, K, G, \pi)$. Puisque dans toute la suite, on prend toujours "Z" trivial pour tous les groupes concernés, on n'indique pas "Z" dans la notation du complexe. De plus dans toute la suite, si le "K" concerné est aussi trivial, on remplacera $C^*(\mathfrak{e}, V, K, G, \pi)$ par $C^*(\mathfrak{e}, V, G, \pi)$.

Soit $\mathbb{H} = L^2(G/Z, \chi)$, l'espace de Hilbert des fonctions f qui vérifient $f(zg) = f(gz) = \chi(z)f(g), \forall g \in G, \forall z \in Z$ et qui sont de carré intégrable modulo Z pour une mesure de Haar invariante à gauche. Le groupe G opère dans $\mathbb{H}$ par la représentation régulière droite r (resp. gauche l, définie par $r(g)f(x) = \Delta^{1/2}(g)f(xg)$ (resp. $l(g)f(x) = f(g^{-1}x)$), $f \in L^2(G/Z, \chi)$, $g, x \in G$, où Δ est la fonction module de G.

On note aussi r la représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (et de son algèbre enveloppante universelle) dans $\mathbb{H}^\infty$, le sous-espace des vecteurs lisses pour r dans $\mathbb{H}$.

Hersant a également démontré que le sous-espace $\ker(\partial_K) \cap \ker(\delta_K)$ du complexe $C^*(\mathfrak{e}, V, K, G, r)$ est invariant par la représentation unitaire $1 \otimes 1 \otimes l$ de G dans $\Lambda(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}$ (où $1 \otimes 1 \otimes l$ signifie que G agit trivialement dans $\Lambda(\mathfrak{e}^*) \otimes V^*$ et par la représentation régulière à gauche dans $\mathbb{H}$). On note la sous-représentation associée $\pi(\mathfrak{e}, V, \chi)$. Comme la représentation $1 \otimes 1 \otimes l$ laisse clairement invariant le sous-espace des q-formes, on a $\pi(\mathfrak{e}, V, \chi) = \bigoplus \pi^q(\mathfrak{e}, V, \chi)$, où $\pi^q(\mathfrak{e}, V, \chi)$ est la sous-représentation associée de G dans $H^{q_\Lambda}(\mathfrak{e}, V, K, G) := (\ker(\partial_K) \cap \ker(\delta_K)) \cap (\Lambda^q(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H})$.

2.2. La construction de Narasimhan-Okamoto dans le cadre de Hersant.

Maintenant, on va énoncer un théorème de Narasimhan-Okamoto dans le cadre de la théorie de Hersant. On reprend les notations du numéro 2.

Supposons donc que G est un groupe de Lie simple connexe et hermitien d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit K un sous-groupe compact maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée et soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ les complexifiés respectifs de $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{p}$. On fixe une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$. Alors sur l'espace homogène G/K, il existe une structure complexe G-invariante. Plus précisément, il existe deux sous-algèbres complexes $\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ telles que

$$\mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_- = \mathfrak{p}_{\mathbb{C}},\ \mathfrak{p}_+ = \overline{\mathfrak{p}_-},\ [\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_+] \subseteq \mathfrak{p}_+.$$

Donc $[\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_-] \subseteq \mathfrak{p}_-$. De plus l'espace des vecteurs tangents anti-holomorphes est canoniquement identifié à $\mathfrak{p}_+$. Soit $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Notons Δ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ par rapport à $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, et Δ_K (resp. Δ_n) l'ensemble des racines compactes (resp. non compactes) pour Δ. Alors il existe un et un seul sous-ensemble $\Delta_n^+ \subset \Delta_n$ tel que $\mathfrak{p}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_n^+} \mathfrak{g}^\alpha$, où $\mathfrak{g}^\alpha$ est l'espace radiciel associé à α, et il existe un ensemble de racines positives Δ^+ de Δ, tel que $\Delta_n^+ \subset \Delta^+$. C'est-à-dire que Δ_n^+ est l'ensemble de racines positives non-compactes par rapport à Δ^+. On note Δ_K^+ l'ensemble de racines compactes positives associé (donc $\Delta^+ = \Delta_n^+ \cup \Delta_K^+$).

On désigne par ρ la demi-somme des racines dans Δ^+. On note W_K le groupe de Weyl du système de racines compactes.

On note $\mathfrak{F}$ l'ensemble des formes linéaires complexes λ sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ qui sont telles que $\lambda+\rho$ soit algébriquement intégrable sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, c'est à dire telles ques $(\lambda+\rho)(H_\alpha)$ soit entier pour tout $\alpha \in \Delta$. Ici H_α est la coracine de α. On a $\mathfrak{F} \subset (i\mathfrak{t})^*$. Posons

$$\mathfrak{F}' = \{\lambda \in \mathfrak{F} | \lambda(H_\alpha) \neq 0 \ \ \forall \alpha \in \Delta\}$$

$$\mathfrak{F}'_0 = \left\{\lambda \in \mathfrak{F}' | \lambda(H_\alpha) > 0 \ \ \forall \alpha \in \Delta_K^+\right\}.$$

Il est clair que $\mathfrak{F}$ est invariant sous l'action de W_K et que chaque W_K-orbite dans $\mathfrak{F}$ rencontre $\mathfrak{F}'$ en un point et un seul.

Harish-Chandra a construit un application $\lambda \to \pi_\lambda$ de $\mathfrak{F}$ dans l'ensemble des séries discrètes de G qui passe au quotient en une bijection de l'ensemble des W_K-orbites dans $\mathfrak{F}$ sur l'ensemble des séries discrètes de G. Par abus, on dit que l'élément $\lambda \in \mathfrak{F}$ est le paramètre de Harish-Chandra de la série discrète π_λ.

Soit donc π_λ une série discrète de G dont le paramètre de Harish-Chandra est $\lambda \in \mathfrak{F}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\lambda \in \mathfrak{F}'_0$.

Si $\Lambda \in i\mathfrak{t}^*$ est un poids dominant relativement à Δ_K^+, c'est à dire vérifie $\Lambda(H_\alpha) \in \mathbb{N}$, pour tout $\alpha \in \Delta_K^+$, on désigne par V^Λ le K-module irréductible de plus haut poids Λ.

Soit w_K le seul élément de W_K tel que $w_K(\Delta^+) = -\Delta^+$. Pour simplifier, on désigne par V_λ le K-module irréductible $V^{-w_K\lambda-\rho}$ de plus haut poids $-w_K\lambda-\rho$. Soient $Q_\lambda = \{\alpha \in \Delta_n^+ | -w_K.\lambda(H_\alpha) > 0\}$ et $q_\lambda = \mathrm{card}(Q_\lambda)$.

Alors, dans le cadre de la théorie de Hersant, posons $\mathfrak{e} := \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ $((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^* \cong \mathfrak{p}_-)$, et $V = V_\lambda$, l'action de $\mathfrak{p}_+$ dans V_λ étant triviale. On note $\pi^q(\mathfrak{e},\lambda) := \pi^q(\mathfrak{e}, V_\lambda, 1)$ la représentation construite par la méthode de Hersant à partir de V_λ ($\chi = 1$ est trivial). Alors le théorème suivant est dû à Narasimhan et Okamoto ([11]) :

Théorème 2.1. *Si $q \neq q_\lambda$, alors $\pi^q(\mathfrak{e},\lambda)$ est réduite à zéro. Par contre, $\pi^{q_\lambda}(\mathfrak{e},\lambda)$ est la série discrète de G dont le paramètre de Harish-Chandra est λ.*

3. Le groupe $SU(2,1)$ et ses sous-groupes B et B_1

Cette section consiste à rappeler des propriétés et fixer des notations sur $SU(2,1)$ et des sous-groupes concernés. Donc dans tout ce qui suit, on note G le groupe $SU(2,1)$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

Pour simplifier notre travail, dans tout ce qui suit, on reprend toutes les notations concernant $G = SU(2,1)$ et ses sous-groupes dans la section 3 dans [9] et la section 2 dansa [10]. On précise les notations qui nous sont utiles.

Soit θ l'involution de Cartan sur G et $\mathfrak{g}$, telle que $\theta(g) = {}^t\overline{g^{-1}}$ pour $g \in G$ et $\theta(X) = -{}^t\overline{X}$ pour $X \in \mathfrak{g}$. Soit $K = \{g \in G | \theta(g) = g\}$ le sous-groupe compact maximal de G, $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} | \theta(X) = -X\}$. Alors

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \det g^{-1} \end{pmatrix} | g \in U(2) \right\} \qquad \mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -\mathrm{tr}\, A \end{pmatrix} | A \in \mathfrak{u}(2) \right\}.$$

Le centre $z(\mathfrak{k})$ de $\mathfrak{k}$ est de dimension 1. Il est engendré par la matrice $Z = i\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. On fixe une sous-algèbre de Cartan compacte $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ comme

$$\mathfrak{t} = \{\operatorname{diag}(ih_1, ih_2, ih_3) |\, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R} \text{ et } h_1 + h_2 + h_3 = 0\}.$$

Le système de racines associé est

$$\Delta := \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) = \{\alpha_{kl} |\, 1 \leqslant k \neq l \leqslant 3\},$$

où

$$\alpha_{kl}(\operatorname{diag}(h_1, h_2, h_3)) = h_k - h_l.$$

Le sous-système des racines compactes est $\Delta_K = \{\pm\alpha_{12}\}$.

Le sous-espace radiciel $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha_{kl}}$ pour la racine α_{kl} est $\mathbb{C}E_{kl}$. Ici $E_{kl} \in M_3(\mathbb{C})$ désigne la matrice élémentaire d'indice kl. La coracine de α_{kl} est la matrice $H_{kl} := E_{kk} - E_{ll}$.

Supposons que π_λ est une série discrète de G avec le paramètre de Harish-Chandra $\lambda \in i\mathfrak{t}^*$. Soit $f_\lambda = -i\lambda \in \mathfrak{t}^*$ qui est le *paramètre de Duflo* dans le cadre de la méthode des orbites. Alors sans perte de généralité, pour π_λ holomorphe (resp. anti-holomorphe), on peut supposer que λ vérifie que $\lambda(H_{12}) \in \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{31}) \in \mathbb{N}^+$ (resp $\lambda(H_{12}) \in \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{23}) \in \mathbb{N}^+$). Pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe, on peut supposer que $\lambda(H_{12}) \in \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{13}) \in \mathbb{N}^+$ avec $\lambda(H_{12}) > \lambda(H_{13})$. On va utiliser cette convention dans toute la suite.

Soit $S = E_{13} + E_{31}$. Alors $\mathfrak{a} = \mathbb{R}S$ est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{p}$. L'ensemble des racines restreintes associées est $\{\pm\beta, \pm 2\beta\}$ avec $\beta(tS) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Les sous-espaces radiciels correspondants sont $\mathfrak{g}_\beta = \mathbb{R}E_1 \oplus \mathbb{R}E_1'$ et $\mathfrak{g}_{2\beta} = \mathbb{R}E_2$, où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_1' = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = i\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a donc $[E_1,\ E_1'] = E_2$. Notons $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\beta + \mathfrak{g}_{2\beta}$ et $N = \exp(\mathfrak{n})$. Alors N est un groupe de Heisenberg de dimension 3. Les décompositions d'Iwasawa associées sont $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ et $G = KAN$. Pour simplifier, on note $B_1 := AN$ et $\mathfrak{b}_1 := \operatorname{Lie}(B_1)$.

Posons $W = \frac{i}{3}(H_{12} + H_{32})$. Alors $\mathfrak{m} = \mathbb{R}W$ est le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{k}$. De plus $[W,\ E_1] = E_1'$, $[W,\ E_1'] = -E_1$, et $[W,\ E_2] = 0$. Donc $\mathfrak{b} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de Borel. Ainsi, $B := MAN$ est le sous-groupe de Borel associé, avec $M := \exp(\mathfrak{m})$.

3.1. Les représentations $\mathrm{T}_\pm$ de B_1 et $\widetilde{\mathrm{T}_\pm}$ de B.

Comme nous l'allons voir, la restriction d'une série discrète de G à B_1 ou B est une sous-représentation de la représentation régulière gauche de ce sous-groupe. Par suite, la décomposition en irréductibles fait apparaître uniquement des représentations intervenant dans la décomposition de la représentation régulière gauche. Or, Duflo a donné une paramétrisation de ces représentations par certaines orbites coadjointes régulières, deux représentations étant équivalentes si et seulement si elles sont associées à la même orbite. Dans ce numéro et le suivant, nous allons décrire la paramétrisation de Duflo pour B_1 et B.

Remarquons que S, E_1, E_1', E_2 constituent une base de $\mathfrak{b}_1$. Notons S^*, E_1^*, $E_1'^*$, E_2^* la base duale correspondante dans $\mathfrak{b}_1^*$.

Posons $f_\pm = \pm E_2^* \in \mathfrak{b}_1^*$. On vérifie directement que $\Omega_\pm = B_1.f_\pm$ sont les deux B_1-orbites coadjointes ouvertes. La paramétrisation de Duflo associe à $\Omega_\pm$ une représentation unitaire irréductible de B_1, notée $\mathrm{T}_\pm$. Les représentations $\mathrm{T}_\pm$ sont les deux séries discrètes de B_1.

Posons $n_\pm = f_\pm|_\mathfrak{n}$, où $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(N)$. Alors, $\mathfrak{n}$ est le radical unipotent de $\mathfrak{b}_1$ et le stabilisateur de $n_\pm$ dans B_1 est le centre de N. On en déduit que

$$\mathrm{T}_\pm = \underset{N}{\overset{B_1}{\mathrm{Ind}\!\uparrow}} \mathrm{T}_{n_\pm}$$

où $\mathrm{T}_{n_\pm}$ est la représentation irréductible unitaire de N associée à $n_\pm$ par la méthode des orbites de Kirillov.

On vérifie que $\mathfrak{l}_\pm = \mathbb{C}\,(E_1 \pm iE_1') \oplus \mathbb{C}E_2 \subset \mathfrak{n}_\mathbb{C}$ est une polarisation positive de $f_\pm$, c'est aussi une polarisation positive pour $n_\pm = f_\pm|_\mathfrak{n}$.

Nous réalisons alors $\mathrm{T}_{n_\pm}$ comme une induite holomorphe : Soit φ une fonction lisse sur N qui vérifie

$$X * \varphi = -n_\pm(X)\varphi \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{l}_\pm \qquad (\Delta)$$

où, $X * \varphi$ est l'action de X sur φ en tant qu'opérateur différentiel invariant à gauche (ici, on prolonge naturellement l'action à $\mathfrak{n}_\mathbb{C}$, plus préciséent, pour $X, Y \in \mathfrak{n}$, $X * \varphi(x) = \frac{d}{dt}\varphi(x\exp(tX)\big|_{t=0}$, et $(X+iY) * \varphi = X * \varphi + iY * \varphi)$.

Comme $E_2 \in \mathfrak{l}_\pm$, on a pour tout $X \in \mathbb{R}E_2$, $\varphi(x\exp(X)) = e^{-in_\pm(X)}\varphi(x)$. Donc, $|\varphi|^2$ est bien définie sur $N/\exp(\mathbb{R}E_2)$. Notons $\mathbb{H}(n_\pm, \mathfrak{l}_\pm,\ N)$ le complété hilbertien de l'espace préhilbertien des fonctions lisses sur B_1 qui vérifient (Δ) avec la norme

$$\|\varphi\|^2 = \int_{N/\exp(\mathbb{R}E_2)} |\varphi|^2 dx < +\infty,$$

où dx est une mesure invariante à gauche sur $N/\exp(\mathbb{R}E_2)$. Une telle mesure existe, puisque $\exp(\mathbb{R}E_2)$ est distingué dans N. Il est clair que N opère dans $\mathbb{H}(n_\pm, \mathfrak{l}_\pm,\ N)$ par translations à gauche, et cette représentation que l'on note $\rho(\ n_\pm,\ \mathfrak{l}_\pm,\ N)$ est bien une réalisation de $\mathrm{T}_{n_\pm}$. Similairement, on peut définir une représentation $\rho(\ f_\pm,\ \mathfrak{l}_\pm,\ B_1)$ de B_1 dans $\mathbb{H}(f_\pm, \mathfrak{l}_\pm,\ B_1)$ (il suffit de remplacer N par B_1). Puisque B_1 est le produit semidirect de A et N, on déduit que

$$\rho(\ f_\pm,\ \mathfrak{l}_\pm,\ B_1) \cong \underset{N}{\overset{B_1}{\mathrm{Ind}\!\uparrow}} \mathrm{T}_{n_\pm} = \mathrm{T}_\pm.$$

De plus, la représentation $\mathrm{T}_\pm$ se prolonge naturellement en une représentation $\widetilde{\mathrm{T}_\pm}$ de B qui est réalisée de la manière suivante:

$$(\widetilde{\mathrm{T}_\pm}(x)\varphi)(y) = \varphi(x^{-1}yx), \quad \varphi \in \mathbb{H}(n_\pm, \mathfrak{l}_\pm,\ B_1) \ \ x \in M,\ y \in B_1.$$

Remarquons que les $\mathrm{T}_\pm$ ne sont rien d'autres que les représentations "$\rho(f_0)$" et "$\rho^\vee(f_0)$" dans Rossi-Vergne ([13]). Ici $\rho^\vee(f_0)$ est la représentation contragrédiente de $\rho(f_0)$. Pour plus de détails (concernant les notations etc), on renvoie à Rossi-Vergne ([13]). (voir aussi [9]).

3.2. Séries discrètes de B.

Comme dans [9] ou [10], pour $m \in \mathbb{Z}$, on note σ_m le caractère de M tel que $\sigma_m(\exp tW) = e^{i(\frac{mt}{3})}$, $t \in \mathbb{R}$. Alors, puisque B_1 est distingué dans B, il est évident que l'on peut prolonger trivialement σ_m en une représentation unitaire irréductible de B (c'est-à-dire que l'action de B_1 est triviale), on la note encore σ_m. Il est facile de voir que les représentations $\sigma_m \otimes \widetilde{\mathrm{T}_\pm}$ que l'on désigne par $\mathrm{T}_{m,\pm}$ sont irréductibles, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

On vérifie que l'ensemble $\{\mathrm{T}_{m,\pm}\}$ est exactement l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de B qui sont obtenues par la paramétrisation de Duflo et que ce sont toutes des séries discrètes. En particulier, *la formule de Plancherel pour B ne fait apparaître que des séries discrètes.* Pour plus de détails, on renvoie à [4] et [9].

4. Décomposition de $\pi_\lambda|_B$

Dans cette section, on va donner une décomposition explicite de $\pi_\lambda|_B$. Notre méthode est essentiellement basée sur la théorie des "formes harmoniques" introduite dans la section 2. Pour π_λ holomorphe ou anti-holomorphe, cette méthode nous donne directement une décomposition explicite. Pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe, cette méthode va nous permettre d'établir l'égalité entre la multiplicité d'une représentation apparaissant dans la décomposition et la dimension d'un certain espace de solutions d'un système différentiel ordinaire linéaire. On en déduit immédiatement que $\pi_\lambda|_B$ est B-admissible. Puis en utilisant les travaux de Fabec et ceux de Kraljeviĉ, on parvient finalement à décomposer $\pi_\lambda|_B$ explicitement.

4.1. Application de la section 2 à la décomposition de $\pi_\lambda|_B$ (et de $\pi_\lambda|_{B_1}$).

Maintenant on revient sur $G = SU(2,1)$ et on reprend les notations des sections précédentes concernant G et ses sous-groupes. Dans notre situation, on peut prendre $\mathfrak{p}_+$ et $\mathfrak{p}_-$ de la section précédente comme

$$\mathfrak{p}_+ = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{array} \right) \middle| Y \in M_{1,2}(\mathbb{C}) \right\}$$

$$\mathfrak{p}_- = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & X \\ 0 & 0 \end{array} \right) \middle| X \in M_{2,1}(\mathbb{C}) \right\}$$

où $\mathfrak{p}_\mathbb{C} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & X \\ Y & 0 \end{array} \right) \middle| X \in M_{2,1}(\mathbb{C}),\ Y \in M_{1,2}(\mathbb{C}) \right\}$ est le complexifié de $\mathfrak{p}$. Si on prend $\Delta_K^+ = \{\alpha_{12}\}$, on a donc $\Delta^+ = \{\alpha_{12}, \alpha_{32}, \alpha_{31}\}$ et $\rho = \alpha_{32}$.
On se donne $\lambda \in i\mathfrak{t}^*$ correspondant à une série discète π_λ de G. Puisque dans notre cas, $W_K = \{s_{\alpha_{12}},\ id\}$, V_λ est le K-module irréductible de plus haut poids

$-s_{\alpha_{12}}\lambda-\alpha_{32}=-s_{12}(\lambda+\alpha_{31})$. Par suite, le K-module dual V_λ^* est de plus haut poids $\lambda+\alpha_{31}$.

Soit maintenant $\mathfrak{e}=\mathfrak{p}_+\oplus\mathfrak{k}_\mathbb{C}$. Cependant on a aussi $\mathfrak{p}_+\oplus\mathfrak{k}_\mathbb{C}=\mathfrak{h}_+\oplus\mathfrak{k}_\mathbb{C}$, où $\mathfrak{h}_+=\mathbb{C}(E_1'+iE_1)\oplus\mathbb{C}(S-iE_2/2)$. On en déduit que $\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1}=\mathfrak{h}_+$ (resp. $\mathfrak{e}_\mathfrak{b}=\mathfrak{h}_+\oplus\mathfrak{m}_\mathbb{C}$) qui est considérée comme une sous-algèbre de $(\mathfrak{b}_1)_\mathbb{C}$ (resp. $\mathfrak{b}_\mathbb{C}$), avec "K,Z" triviaux, "$V=V_\lambda$" dans lequel l'action de $\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1}$ provient par restriction de celle de $\mathfrak{e}$ (resp. avec "$K=M$", "Z" trivial, "$V=V_\lambda$" dans lequel l'action de $\mathfrak{e}_\mathfrak{b}$ provient par restriction de celle de $\mathfrak{e}$) vérifient les "hypothèses de Hersant". Comme $G=KB_1=KB$, on voit alors que le complexe de Hersant $C^*(\mathfrak{e},V_\lambda,K,G)$ peut aussi s'interpréter comme $C^*(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1},V_\lambda,B_1)$ ou $C^*(\mathfrak{e}_\mathfrak{b},V_\lambda,M,B)$, et que

$$H^{q_\lambda}(\mathfrak{e},V_\lambda,K,G)=H^{q_\lambda}(\mathfrak{e}_\mathfrak{b},V_\lambda,M,B)=H^{q_\lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1},V_\lambda,B_1),$$

chacun d'eux fournissant la restriction de la représentation $\pi_\lambda=\pi^{q_\lambda}(\mathfrak{e},\lambda)$ au sous-groupe correspondant. Donc $\pi_\lambda|_{B_1}$ (resp. $\pi_\lambda|_B$) est l'action de B_1 par translations à gauche dans $H^{q_\lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1},V_\lambda,B_1)$ (resp. $H^{q_\lambda}(\mathfrak{e}_\mathfrak{b},V_\lambda,M,B)$).

Notons ξ la représentation de $\mathfrak{p}_+\oplus\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ dans $V_\lambda^*\cong V^{\lambda+\alpha_{31}}$ triviale sur $\mathfrak{p}_+$ et dont la restriction à $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ est la représentation irréductible de plus haut poids $\lambda+\alpha_{31}$. On note $\xi|_{\mathfrak{h}_+}$ encore par ξ. On désigne l'espace dans lequel T_- (resp. T_+) agit par $\mathbb{H}_-$ (resp. $\mathbb{H}_+$), et $\mathbb{H}_-^\infty$ (resp. $\mathbb{H}_+^\infty$) le sous-espace des vecteurs C^∞ de T_- (resp. T_+). Pour $q=0,1,2$ (comme $\dim_\mathbb{C}\mathfrak{p}_+=2$, on a $\Lambda^q(\mathfrak{h}_+)=0$ pour $q\geq 3$), définissons

$$(\delta_\pm)_{\lambda,q}:\Lambda^q(\mathfrak{h}_+)^*\otimes V^{\lambda+\alpha_{31}}\otimes\mathbb{H}_\pm^\infty\longrightarrow\Lambda^{q+1}(\mathfrak{h}_+)^*\otimes V^{\lambda+\alpha_{31}}\otimes\mathbb{H}_\pm^\infty,$$

le cobord standard de Hochschild-Serre pour le $\mathfrak{h}_+$-module $V^{\lambda+\alpha_{31}}\otimes\mathbb{H}_\pm^\infty$, où l'action de $\mathfrak{h}_+$ dans $\mathbb{H}_\pm^\infty$ est induite par $\mathrm{T}_\pm$, mais celle de $\mathfrak{h}_+$ dans $V^{\lambda+\alpha_{31}}$ est $\xi+(\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{b}_1}).\mathrm{id}/2$ (non pas simplement ξ). Soit ${(\delta_\pm)_{\lambda,q}}^*$ l'adjoint formel de $(\delta_\pm)_{\lambda,q}$ tel qu'il est explicité dans [3]. Alors il est clair que le complexe ci-dessus n'est rien autre que le complexe de Hersant $C^*(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1},V^{\lambda+\alpha_{31}},B_1,\mathrm{T}_\pm)$ mais pour lequel l'action de $\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1}=\mathfrak{h}_+$ est $\xi+(\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{b}_1}).\mathrm{id}/2$. Notons alors $\mathfrak{H}_{\lambda,\pm}^q=\ker(\delta_\pm)_{\lambda,q}\cap\ker{(\delta_\pm)_{\lambda,q}}^*$ et $\mathfrak{H}_{\lambda,\pm}=\bigoplus_{q=0}^2\mathfrak{H}_{\lambda,\pm}^q$.

Maintenant, considérons le $(\mathfrak{e}_\mathfrak{b},M)$-module $V^{\lambda+\alpha_{31}}$, où l'action de M dans $V^{\lambda+\alpha_{31}}$ est induite par celle de K, mais l'action de $\mathfrak{e}_\mathfrak{b}$ dans $V^{\lambda+\alpha_{31}}$ est $\xi+(\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}_\mathfrak{b}).\mathrm{id}/2$ (rappelons que on a déjà défini le $\mathfrak{e}$-module ξ plus haut, ici on désigne $\xi|_{\mathfrak{e}_\mathfrak{b}}$ encore par ξ). Donc à partir de ce module, on peut construire le complexe de Hersant $C^*(\mathfrak{e}_\mathfrak{b},V^{\lambda+\alpha_{31}},M,B,\mathrm{T}_{m,\pm})$, où $\mathrm{T}_{m,\pm}$ est la représentation unitaire irréductible de B que l'on a déjà définie. Puisque $\mathrm{T}_{m,\pm}=\sigma_m\otimes\widetilde{\mathrm{T}_\pm}$ qui prolonge $\mathrm{T}_\pm$, et $(\mathfrak{e}_\mathfrak{b})/\mathfrak{m}_\mathbb{C}\cong\mathfrak{h}_+$, on déduit que le "$\ker(\partial_K)\cap\ker(\delta_K)$" (pour la notation, voir le "Rappel de la théorie de Hersant") pour $C^*(\mathfrak{e}_\mathfrak{b},V^{\lambda+\alpha_{31}},M,B,\mathrm{T}_{m,\pm})$ n'est rien d'autre que $(\mathfrak{H}_{\lambda,\pm})_{\sigma_{-m}}$, où pour $m\in\mathbb{Z}$, $(\mathfrak{H}_{\lambda,\pm})_{\sigma_m}$ désigne le sous-espace de $\mathfrak{H}_{\lambda,\pm}$ constitué des vecteurs de poids σ_m pour la représentation $\mathrm{Ad}^*\otimes\tau_{\lambda+\alpha_{31}}\otimes\widetilde{\mathrm{T}_\pm}$ de M. On note $(\mathfrak{H}_{\lambda,\pm})_{\sigma_m}^q=(\mathfrak{H}_{\lambda,\pm})_{\sigma_m}\cap\mathfrak{H}_{\lambda,\pm}^q$, $q=0,1,2$. Il est clair que $\mathfrak{H}_{\lambda,\pm}^q=\oplus_{m\in\mathbb{Z}}(\mathfrak{H}_{\lambda,\pm})_{\sigma_m}^q$.

Maintenant on énonce le premier théorème de cette section.

Théorème 4.1.

$$\textit{(i)}\quad \pi_\lambda|_{B_1} = \pi^{q_\lambda}(\mathfrak{e})|_{B_1} \cong \dim(\mathfrak{H}^{q_\lambda}_{\lambda,-})\mathrm{T}_+ \oplus \dim(\mathfrak{H}^{q_\lambda}_{\lambda,+})\mathrm{T}_-.$$

$$\textit{(ii)}\quad \pi_\lambda|_{B} = \pi^{q_\lambda}(\mathfrak{e})|_{B} \cong \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left[\dim((\mathfrak{H}_{\lambda,-})^{q_\lambda}_{\sigma_m})\mathrm{T}_{m,+} \oplus \dim((\mathfrak{H}_{\lambda,+})^{q_\lambda}_{\sigma_m})\mathrm{T}_{m,-}\right].$$

Démonstration. On va d'abord montrer (i): puisque $H^{q_\lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1}, V_\lambda, B_1)$ est B_1-invariant pour $1\otimes 1\otimes l$, on peut le désintégrer par la décomposition de Plancherel, autrement dit

$$H^{q_\lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1}, V_\lambda, B_1) \cong \sum_{\pi\in\widehat{B_1}_d} \mathbb{H}_\pi \otimes \mathrm{Hom}_{B_1}(\mathbb{H}_\pi, H^{q_\lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1}, V_\lambda, B_1)).$$

Ici $\widehat{B_1}_d$ désigne l'ensemble des séries discrètes de B_1, $\mathbb{H}_\pi$ est l'espace dans lequel π agit et $\mathrm{Hom}_{B_1}(\mathbb{H}_\pi, H^{q_\lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1}, V_\lambda, B_1))$ est l'espace des opérateurs d'entrelacement entre $\mathbb{H}_\pi$ et $H^{q_\lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1}, V_\lambda, B_1)$. Dans notre cas, B_1 ne possède que 2 séries discrètes: T_- et T_+ dont l'une est la contragrédiente ou la complexe conjuguée de l'autre. En effet, d'une part B_1 a uniquement deux orbites coadjointes ouvertes Ω_+ et Ω_-; d'autre part, on vérifie facilement que la désintégration de la restriction de T_+ à N ne fait intervenir que les représentations de caractère central $\exp tE_2 \mapsto e^{iat}$ avec $a > 0$. Pour décrire concrètement l'espace $\mathrm{Hom}_{B_1}(\mathbb{H}_\pi, H^{q_\lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1}, V_\lambda, B_1))$, on peut suivre la méthode de Schmid pour les groupes de Lie semi-simples ([14]), sauf que dans notre cas, il faut faire un ajustement concernant la fonction module, puisque le groupe B_1 n'est pas unimodulaire. En fait sous l'identification de Plancherel

$$L^2(B_1) \cong \sum_{\pi\in\widehat{B_1}_d} \mathbb{H}_\pi \otimes \mathbb{H}_{\pi^\vee},\ \text{où } \pi^\vee \text{ est la représentation contragrédiente de } \pi,$$

la différentielle de l'action de B_1 dans $\mathbb{H}_{\pi^\vee}$ ne correspond pas à l'action régulière à droite r (dans $L^2(B_1)$), mais correspond à $r - (\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{b}_1}).\mathrm{id}/2$, et le reste est expliqué dans la section 5 de [3] (voir aussi [12]).

On peut démontrer (ii) similairement, et il suffit de remarquer que la représentation contragrédiente de $\mathrm{T}_{m,\pm}$ est $\mathrm{T}_{-m,\mp}$. ■

Remarque. Il est clair que $\dim(\mathfrak{H}^{q_\lambda}_{\lambda,\pm}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \dim((\mathfrak{H}_{\lambda,\pm})^{q_\lambda}_{\sigma_m})$.

Maintenant, sauf indication contraire, on garde toutes les notations concernant $G = SU(2,1)$ et ses sous-groupes introduites dans les sections précédents. Soit donc π_λ une série discrète avec le paramètre de Harish-Chandra $\lambda \in i\mathfrak{t}^*$. Notons $f_\lambda = -i\lambda \in \mathfrak{t}^*$ le paramètre de Duflo. Dans la suite, on va exprimer les résultats concernés en fonction de $f_\lambda(H)$ et $f_\lambda(Z)$. Ici $H := iH_{12}$ et Z est la matrice définie dans la section 3.

On commence alors par traiter les séries discrètes non-holomorphes. Supposons donc que π_λ est une série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe. Comme dans la section 3, on suppose que $\lambda(H_{12}) \in \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{13}) \in \mathbb{N}^+$ avec

$\lambda(H_{12}) > \lambda(H_{13})$. Alors il est clair que $f_\lambda(H) \in \mathbb{N}^+$, $f_\lambda(H) + f_\lambda(Z) \in 2\mathbb{N}^+$ et $|f_\lambda(H)| > |f_\lambda(Z)|$. On peut déduire facilement que dans ce cas, $q_\lambda = 1$.

On va d'abord introduire le système différentiel ordinaire (d'ordre 1) $D^{\pm}_{\lambda,m}$ sur $]0,+\infty[$ pour chaque $m \in \mathbb{N}$: si $m \geqslant f_\lambda(H)$, $D^{\pm}_{\lambda,m}$ a $2f_\lambda(H)$ fonctions inconnues, et si $0 \leqslant m \leqslant f_\lambda(H) - 1$, $D^{\pm}_{\lambda,m}$ a $2m+1$ fonctions inconnues. Plus précisément: si $m \geq f_\lambda(H)$, le système $D^{\pm}_{\lambda,m}$ est le suivant:

$$(y^{\pm}_m)'(t) = (t^{-1}A^{\pm}_m + t^{-2}B^{\pm}_m + t^{-3}C^{\pm}_m)y^{\pm}_m(t) \quad (t \in]0,+\infty[) \quad (D^{\pm}_{\lambda,m}, \quad m \geqslant f_\lambda(H))$$

où

$$y^{\pm}_m(t) = \begin{pmatrix} a^{\pm}_{m,1}(t) \\ \vdots \\ a^{\pm}_{m,n}(t) \\ \vdots \\ a^{\pm}_{m,2f_\lambda(H)}(t) \end{pmatrix}$$

$$A^{\pm}_m = \begin{pmatrix} r^{\pm}_m & & & & & & \\ & A^{\pm}_{m,0} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & A^{\pm} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & A_{m,(f_\lambda(H)-2)} & \\ & & & & & & s^{\pm}_m \end{pmatrix},$$

avec $r^-_m = s^+_m = \frac{f_\lambda(Z)-f_\lambda(H)}{2}$, $s^-_m = r^+_m = -(\frac{f_\lambda(Z)+f_\lambda(H)}{2})$ et

$$A^-_{m,n} = \begin{pmatrix} -(n+1+\frac{f_\lambda(Z)-f_\lambda(H)}{2}) & \sqrt{2}i(n+1) \\ -\sqrt{2}i(f_\lambda(H)-n-1) & (n+1+\frac{f_\lambda(Z)-f_\lambda(H)}{2}) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq n \leq f_\lambda(H)-2$$

$$A^+_{m,n} = \begin{pmatrix} (\frac{f_\lambda(Z)+f_\lambda(H)}{2}-n-1) & -\sqrt{2}i(n+1) \\ \sqrt{2}i(f_\lambda(H)-n-1) & (n+1-\frac{f_\lambda(Z)+f_\lambda(H)}{2}) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq n \leq f_\lambda(H)-2$$

$$B^{\pm}_m = \begin{pmatrix} B^{\pm}_{m,0} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & B^{\pm}_{m,n} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B^{\pm}_{m,f_\lambda(H)-1} \end{pmatrix}$$

avec

$$B^{\pm}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 2(m-n) & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq n \leq f_\lambda(H)-1$$

et

$$C_m^{\pm} = \begin{pmatrix} C_{m,0}^{\pm} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C_{m,n}^{\pm} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C_{m,f_\lambda(H)-1}^{\pm} \end{pmatrix}$$

avec

$$C_{m,n}^{\pm} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \le n \le f_\lambda(H) - 1.$$

Et si $0 \leqslant m \leqslant f_\lambda(H) - 1$, le système $D_{\lambda,m}^{\pm}$ est le suivant:

$$(y_m^{\pm})'(t) = (t^{-1}A_m^{\pm} + t^{-2}B_m^{\pm} + t^{-3}C_m^{\pm})y_m^{\pm}(t) \quad (t \in]0, +\infty[) \ (D_{\lambda,m}^{\pm}, \quad 0 \leqslant m \leqslant f_\lambda(H) - 1)$$

où

$$y_m^{\pm}(t) = \begin{pmatrix} a_{m,1}^{\pm}(t) \\ \vdots \\ a_{m,n}^{\pm}(t) \\ \vdots \\ a_{m,2m+1}^{\pm}(t) \end{pmatrix}$$

$$A_m^{\pm} = \begin{pmatrix} r_m^{\pm} & & & & & \\ & A_{m,0}^{\pm} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & A_{m,n}^{\pm} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_{m,m-1}^{\pm} \end{pmatrix}$$

avec $r_m^- = \frac{f_\lambda(Z) - f_\lambda(H)}{2}$, $r_m^+ = -(\frac{f_\lambda(Z) + f_\lambda(H)}{2})$ et

$$A_{m,n}^{-} = \begin{pmatrix} -(n + 1 + \frac{f_\lambda(Z) - f_\lambda(H)}{2}) & \sqrt{2}i(n+1) \\ -\sqrt{2}i(f_\lambda(H) - n - 1) & (n + 1 + \frac{f_\lambda(Z) - f_\lambda(H)}{2}) \end{pmatrix}, \quad 0 \le n \le m - 1$$

$$A_{m,n}^{+} = \begin{pmatrix} (\frac{f_\lambda(Z) + f_\lambda(H)}{2} - n - 1) & -\sqrt{2}i(n+1) \\ \sqrt{2}i(f_\lambda(H) - n - 1) & (n + 1 - \frac{f_\lambda(Z) + f_\lambda(H)}{2}) \end{pmatrix}, \quad 0 \le n \le m - 1$$

$$B_m^{\pm} = \begin{pmatrix} B_{m,0}^{\pm} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & B_{m,n}^{\pm} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & B_{m,m-1}^{\pm} & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$B_{m,n}^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 2(m-n) & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le n \le m - 1$$

et

$$C_m^{\pm} = \begin{pmatrix} C_{m,0}^{\pm} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & C_{m,n}^{\pm} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & C_{m,m-1}^{\pm} & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix},$$

avec

$$C_{m,n}^{\pm} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq n \leq m-1.$$

Définissons alors

$$(D_{\lambda,m}^{\pm})^{\infty} = \left\{ y_m \text{ solution de } D_{\lambda,m}^{\pm}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\|y_m(t)\|^2}{t} dt < +\infty \right\}.$$

Maintenant on énonce le deuxième théorème de cette section:

Théorème 4.2. *Pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe avec $f_\lambda(H) \in \mathbb{N}^+$, $f_\lambda(H) + f_\lambda(Z) \in 2\mathbb{N}^+$ et $|f_\lambda(H)| > |f_\lambda(Z)|$, on a que*

$$\pi_\lambda|_B \cong \sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D_{\lambda,m}^{-})^{\infty}).\mathrm{T}_{[3m - \frac{(3f_\lambda(H)+f_\lambda(Z))}{2}],+} \oplus$$

$$\oplus \sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D_{\lambda,m}^{+})^{\infty}).\mathrm{T}_{[-(3m + \frac{f_\lambda(Z)-3f_\lambda(H)}{2})],-},$$

et

$$\pi_\lambda|_{B_1} \cong \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D_{\lambda,m}^{-})^{\infty}) \right) \mathrm{T}_+ \oplus \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D_{\lambda,m}^{+})^{\infty}) \right) \mathrm{T}_-.$$

Remarque. Puisque $\dim((D_{\lambda,m}^{\pm})^{\infty}) \leqslant 2f_\lambda(H)$, on déduit principalement de ce résultat que π_λ est B-admissible.

Démonstration. D'après le théorème précédent et la remarque qui le suit, il s'agit de montrer:

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $l = \pm(3m - \frac{(3f_\lambda(H) \pm f_\lambda(Z))}{2})$

$$\dim((\mathfrak{H}_{\lambda,\mp})^1_{\sigma_l}) = \dim((D_m^{\mp})^{\infty})$$

et pour les autres $l \in \mathbb{Z}$,

$$\dim((\mathfrak{H}_{\lambda,\pm})^1_{\sigma_l}) = 0.$$

On va d'abord traiter le cas de $(\mathfrak{H}_{\lambda,-})^1 = \ker(\delta_-)_{\lambda,1} \cap \ker(\delta_-)^*_{\lambda,1}$. Posons $H_1 := S$, $Z_1 := -E_2/2$, $X_1 := E'_1/\sqrt{2}$ et $Y_1 := E_1/\sqrt{2}$. Alors dans $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, $[X_1, Y_1] = Z_1$, $[H_1, X_1] = X_1$, $[H_1, Y_1] = Y_1$ et $[H_1, Z_1] = 2Z_1$. Notons $J_0 = H_1 + iZ_1$, et $J_1 = X_1 + iY_1$, alors $\mathbb{C}J_0 \oplus \mathbb{C}J_1 = \mathfrak{h}_+$. Donc si on note φ_0, φ_1 la base duale de J_0 et J_1, tous les éléments dans $\Lambda^1(\mathfrak{h}_+)^* \otimes V^{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}^\infty_{\pi_1}$ s'écrivent sous la forme $\varphi_0 \otimes v_0 + \varphi_1 \otimes v_1$ avec $v_0, v_1 \in V^{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}^\infty_{\pi_1}$, et on peut vérifier directement que les équations

$$(\delta_-)_{\lambda,1}(\varphi_0 \otimes v_0 + \varphi_1 \otimes v_1) = 0 \ \text{ dans } \Lambda^2(\mathfrak{h}_+)^* \otimes V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}^\infty_-$$

et

$$(\delta_-)^*_{\lambda,1}((\varphi_0 \otimes v_0 + \varphi_1 \otimes v_1) = 0 \ \text{ dans } V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}^\infty_-$$

sont équivalentes à

$$J_0.v_1 = J_1.v_0 + v_1$$

et

$$J_0^*.v_0 + J_1^*.v_1 = 0.$$

Dans les 2 dernières équations, J_0 et J_1 sont en tant qu'opérateurs dans $V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}^\infty_-$ (par rapport à la représentation $(\xi + (\mathrm{tr\ ad}).\mathrm{id}) \otimes \mathrm{T}_-$) et J_0^* (resp. J_1^*) est l'adjoint formel de J_0 (resp. J_1). Donc $\ker(\delta_-)_{\lambda,1} \cap \ker(\delta_-)^*_{\lambda,1}$ est l'ensemble des éléments $\varphi_0 \otimes v_0 + \varphi_1 \otimes v_1$ qui vérifient les 2 dernières équations. Dans la suite, on va déterminer explicitement les actions de J_0, J_1 et J_0^*, J_1^* dans $V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}^\infty_-$. Pour ceci, il suffit de déterminer celles dans $V_{\lambda+\alpha_{31}}$ et dans $\mathbb{H}^\infty_-$ repectivement. On va d'abord déterminer leurs actions dans $\mathbb{H}^\infty_-$.

On a déjà vu que $\mathrm{T}_- \cong \mathrm{Ind}_N^{B_1} \rho(n_-, \mathfrak{l}_-, N)$, où $\rho(n_-, \mathfrak{l}_-, N)$ est une induite holomorphe.

Comme $n_- = -E_2^*$, on a $n_-(X_1) = n_-(Y_1) = 0$ et $n_-(Z_1) > 0$, sans perte de généralité, on peut supposer que $n_- = Z_1^*$ (par rapport à la base duale X_1^*, Y_1^*, Z_1^* dans $\mathfrak{n}^*$), car $\mathrm{T}_- \cong \mathrm{Ind}_N^{B_1} \rho(n_-, \mathfrak{l}_-, N) \cong \mathrm{Ind}_N^{B_1} \rho(rn_-, \mathfrak{l}_-, N)$, $\forall r > 0$. Soit F_1 un élément de l'espace de la représentation $\rho(n_-, \mathfrak{l}_-, N)$, et

$$g = \exp(xX_1 + yY_1 + zZ_1) \in N.$$

Il est clair que $F_1(g) = e^{-iz} F_1(\exp(xX_1 + yY_1))$ (rappelons que par définition $\forall X \in \mathfrak{l}_-$, on a $X * F_1 + if_0(X)F_1 = 0$). On peut donc identifier F_1 à une fonction $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : x + iy \longmapsto F_1(\exp(xX_1 + yY_1))$. Pour simplifier, on la note encore F_1, et sous cette identification, par des calculs directs, on peut obtenir que $X_1 * F_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{i}{2} y F_1$, $Y_1 * F_1 = \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{i}{2} x F_1$, et $Z_1 * F_1 = -iF_1$. On en déduit que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)F_1 + \frac{1}{2}(x + iy)F_1 = 0 \qquad (\Delta).$$

On peut vérifier que $F_0(x + iy) = e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)}$ est une solution particulière de (Δ). Puisque F_0 ne s'annule en aucun point, F_1 s'écrit sous la forme $F_1 = F_2.F_0$ avec

F_2 holomorphe (car $(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})F_2=0$). Donc $\rho(n_-,\mathfrak{l}_-,N)$ peut se réaliser dans l'espace hilbertien

$$\mathbb{H}_{N,Z_1^*}=\left\{F;\quad F \text{ est holomorphe et } \int_{\mathbb{C}}|F(\omega)|^2e^{-\frac{|\omega|^2}{2}}d\omega<\infty\right\},$$

où $\omega=x+iy$.

Notons $\mathbb{H}_{B_1,Z_1^*}$ l'espace hilbertien où agit $\mathrm{Ind}_N^{B_1}\rho(n_-,\mathfrak{l}_-,N)\cong \mathrm{T}_-$ et soit $f\in\mathbb{H}_{B_1,Z_1^*}$. Vu que $B_1/N=A$, f est une fonction de B_1 dans $\mathbb{H}_{N,Z_1^*}$ qui vérifie

$$f(gn)=\rho(n_-,\mathfrak{l}_-,N)(n^{-1})f(g),\text{et}\int_A\|f(g)\|^2dg<\infty.$$

Il est clair que le groupe R_+^* (pour la multiplication) est isomorphe à $A=\exp\mathbb{R}H_1$ par $t\longmapsto\exp(\log t)H_1$, et une mesure de Haar pour R_+^* est $\frac{dt}{t}$ (ici dt est la mesure de Lebesgue). Donc on peut identifier $\mathbb{H}_{B_1,Z_1^*}$ à l'espace hilbertien

$$\Big\{f:R_+^*\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}|\ f \text{ est mesurable, pour presque tout } t\in R_+^*,\omega\longmapsto f(t,\omega)$$

$$\text{est holomorphe et }\int_{R_+^*\times\mathbb{C}}|f(t,\omega)|^2e^{-\frac{|\omega|^2}{2}}\frac{dt}{t}d\omega<\infty\Bigg\}.$$

On note cet espace encore $\mathbb{H}_{B_1,Z_1^*}$ et π_{B_1} la représentation associée (qui est équivalente à T_-). D'autre part, on voit facilement que $f\in\mathbb{H}_{B_1,Z_1^*}$ correspond à une application $\phi:\mathbb{R}_+^*\mapsto\mathbb{H}(n_-,\mathfrak{l}_-,N)$, avec $f(t,\omega)=\phi(t)(g).e^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)}.e^{iz}$ où $\omega=x+iy$ et $g=\exp(xX_1+yY_1+zZ_1)$. Puisque

$$\exp(-uH_1).\exp(\log tH_1).\exp(xX_1+yY_1+zZ_1)$$

$$=\exp(\log(e^{-u}t)H_1).\exp(xX_1+yY_1+zZ_1),$$

on déduit facilement que pour $f\in\mathbb{H}_{B_1,Z_1^*}$,

$$(\pi_{B_1}(\exp(uH_1))f(t,\omega)=f(e^{-u}t,\omega).$$

Donc si de plus $f\in\mathbb{H}^\infty_{B_1,Z_1^*}$, on a $(d\pi_{B_1}(H_1)f)(t,\omega)=-t\frac{\partial f}{\partial t}(t,\omega)$.

De même, comme

$$\exp(-uZ_1).\exp(\log tH_1)\exp(xX_1+yY_1+zZ_1)$$

$$=\exp(\log tH_1)\exp(xX_1+yY_1+(z-ut^{-2})Z_1),$$

on obtient que $(\pi_{B_1}(\exp(uZ_1))f(t,\omega)=e^{iut^{-2}}f(t,\omega)$. Donc $(d\pi_{B_1}(Z_1)f)(t,\omega)=it^{-2}f(t,\omega)$ pour $f\in\mathbb{H}^\infty_{B_1,Z_1^*}$.

De la même façon, on peut obtenir que

$$(\pi_{B_1}(\exp(uX_1+vY_1))f)(t,\omega)=e^{\left(\frac{1}{2}t^{-1}\omega(u-iv)-\frac{t^{-2}}{4}(u^2+v^2)\right)}f(t,\omega-t^{-1}(u+iv)).$$

Donc

$$(d\pi_{B_1}(X_1)f)(t,\omega)=\frac{1}{2}t^{-1}\omega f(t,\omega)-t^{-1}\frac{\partial f}{\partial\omega}(t,\omega)$$

et

$$(d\pi_{B_1}(Y_1)f)(t,\omega) = -\frac{i}{2}t^{-1}\omega f(t,\omega) - it^{-1}\frac{\partial f}{\partial \omega}(t,\omega).$$

Donc

$$(d\pi_{B_1}(J_0)f)(t,\omega) = -t^{-2}f(t,\omega) - t\frac{\partial f}{\partial t}(t,\omega)$$

$$(d\pi_{B_1}(J_1)f)(t,\omega) = t^{-1}\omega f(t,\omega).$$

Avant de déterminer J_0^* et J_1^*, on va d'abord décrire l'action du groupe compact M dans $\mathbb{H}_{B_1,Z_1^*}$. On a vu que $(\nu(m)\varphi)(x) = \varphi(m^{-1}xm)$ pour $\varphi \in \mathbb{H}(h_0, \mathfrak{b}_1^-, B_1)$ et $m \in M$. On a aussi vu $M = \exp \mathbb{R}W$, avec $\exp \mathrm{ad}(-wW).X_1 = (\cos w)X_1 + (\sin w)Y_1$ et $\exp \mathrm{ad}(-wW)\ .Y_1 = -(\sin w)X_1 + (\cos w)Y_1$, où

$$W = \begin{pmatrix} i/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2i/3 & 0 \\ 0 & 0 & i/3 \end{pmatrix}.$$

Donc si $m = \exp wW$ et $g = \exp(hH_1).\exp(xX_1 + yY_1 + zZ_1))$, alors $m^{-1}gm = \exp(hH_1).\exp((x\cos w - y\sin w)X_1 + (x\sin w + y\cos w)Y_1 + zZ_1)$. On en déduit que pour $f \in \mathbb{H}_{B_1,Z_1^*}$, on a $(m.f)(t,\omega) = f(t,\omega e^{i(w)})$. Donc les éléments dans $\mathbb{H}_{B_1,Z_1^*}$ qui sont de la forme $f(t)\omega^n$ sont des vecteurs poids de M, $(m.(f(t)\omega^n) = (f(t)\omega^n).e^{inw})$, et le sous-espace engendré par ce genre d'éléments est dense dans $\mathbb{H}_{B_1,Z_1^*}$. En fait, on peut vérifier directement que $\langle f(t)\omega^n, g(t)\omega^m\rangle = 0$ si $n \neq m$ où $\langle , \rangle$ est le produit scalaire de $\mathbb{H}_{B_1,Z_1^*}$, et tout élément $f(t,\omega) \in \mathbb{H}_{B_1,Z_1^*}$ s'écrit $f(t,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\omega^n$.

Puisque $\int_{\mathbb{C}} |\omega|^{2n} e^{-\frac{|\omega|^2}{2}} d\omega = 2\pi.2^n.n!$, on en déduit que

$$\mathbb{H}_{B_1,Z_1^*} = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\omega^n;\ \ \sum_{n=0}^{+\infty}(2^n.n!.\int_{R_+^*} \frac{|f_n(t)|^2}{t}dt) < \infty \right\}.$$

Maintenant on va calculer J_0^* et J_1^*. Comme π_{B_1} est unitaire, pour tout $X \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, on a $d\pi_{B_1}(X)^* = -d\pi_{B_1}(X)$. Donc on en déduit immédiatement le calcul de J_0^* et J_1^*:

$$J_0^* = d\pi_{B_1}(H_1 + iZ_1)^* = d\pi_{B_1}(-H_1 + iZ_1) = -t^{-2} + t\frac{\partial}{\partial t}$$

$$J_1^* = d\pi_{B_1}(X_1 + iY_1)^* = d\pi_{B_1}(-X_1 + iY_1) = 2t^{-1}\frac{\partial}{\partial \omega}.$$

Maintenant, on va calculer l'action de J_0, J_1, J_0^* et J_1^* dans $V_{\lambda+\alpha_{31}}$. Les opérateurs sont induits par la représentation ξ+(tr ad).id de $\mathfrak{h}_+ = \mathbb{C}J_0 + \mathbb{C}J_1$ dans $V_{\lambda+\alpha_{31}}$. D'abord, on peut vérifier directement que $\dim(V_{\lambda+\alpha_{31}}) = f_\lambda(H)$ (rappelons que $f_\lambda(H) = -i\lambda(iH_{12}) = \lambda(H_{12})$). D'autre part $\mathfrak{k} \cong \mathfrak{su}(2) \oplus z(\mathfrak{k})$ où $z(\mathfrak{k})$ est le centre de $\mathfrak{k}$, les représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(2)$ sont déterminées par leur dimension et $z(\mathfrak{k})$ agit scalairement. Il est bien connu que l'on peut réaliser $V_{\lambda+\alpha_{31}}$ dans l'espace des polynômes complexes homogènes en 2 variables de degré $f_\lambda(H) - 1$, et le produit scalaire $\langle , \rangle_1$ est défini par $\langle P, Q\rangle_1 = \int_{\mathbb{C}^2} P\overline{Q} e^{-\frac{(|\omega_1|^2+|\omega_2|^2)}{2}} d\omega_1 d\omega_2$.

Notons $v_n = \omega_1^n.\omega_2^{(f_\lambda(H)-1-n)}$ ($n = 0, 1.., f_\lambda(H) - 1$). Alors $\tau_{\lambda+\alpha_{31}}(H_{12})v_n = (f_\lambda(H) - 1 - 2n)v_n$ et $\tau_{\lambda+\alpha_{31}}(E_{12})v_n = -nv_{n-1}$ (par convention, $v_{-1} = 0$). Rappelons que les matrices H_{lk} et E_{lk} sont définies dans la section 3.

Notons

$$Z_0' = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

alors $\mathbb{C}Z_0' = z(\mathfrak{k})_{\mathbb{C}}$. Donc Z_0' agit scalairement dans $V_{\lambda+\alpha_{31}}$. Puisque $Z_0' = H_{13} - H_{12}/2$ et $(\lambda + \alpha_{31})(H_{13} - H_{12}/2) = (\lambda + \alpha_{31})(H_{13} - H_{12}/2) = \frac{f_\lambda(Z)}{2} - 3/2$, *on note cette quantité* α, $\tau_{\lambda+\alpha_{31}}(Z_0') = \alpha.\mathrm{id}$.

Puisque

$$J_0 = H_1 + iZ_1 = H_1 - iE_2/2 = H_{13} + 2E_{31} \quad \text{avec} \quad H_{13} \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \quad E_{31} \in \mathfrak{p}_+,$$

on a

$$\xi(J_0) = \tau_{\lambda+\alpha_{31}}(H_{13}).$$

Or, $H_{13} = \frac{H_{12}}{2} + Z_0'$, donc $\xi(J_0) = \tau_{\lambda+\alpha_{31}}(\frac{H_{12}}{2} + Z_0')$. D'autre part, on a tr ad $= 4H_1^*$, où H_1^* est l'élément de la base duale H_1^*, X_1^*, Y_1^*, Z_1^* de $\mathfrak{b}_1^*$, et $H_1^*(J_0) = 1$. Donc on en déduit que

$$J_0(v_n) = ((\xi + 2H_1^*\mathrm{id})(J_0))(v_n) = (\frac{f_\lambda(H) - 1 - 2n}{2} + \alpha + 2)v_n.$$

De même,

$$J_1 = E_1'/\sqrt{2} + iE_1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}iE_{12} - \sqrt{2}iE_{32}$$

avec $E_{12} \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ et $E_{32} \in \mathfrak{p}_+$. Donc $\xi(J_1) = \tau_{\lambda+\alpha_{31}}(-\sqrt{2}iE_0)$, or tr ad$(J_1) = 0$, et on a

$$J_1(v_n) = -\sqrt{2}i(\tau_{\lambda+\alpha_{31}}(E_0))(v_n) = \sqrt{2}inv_{n-1}.$$

On vérifie que $\langle v_n, v_m \rangle_1 = 0$ si $n \neq m$, et

$$\langle v_n, v_n \rangle_1 = 4\pi^2.2^{f_\lambda(H)-1}.n!.(f_\lambda(H) - 1 - n)!.$$

On en déduit que $J_0^* = J_0$ (car $\frac{f_\lambda(H)-1-2n}{2} - \alpha + 2 \in \mathbb{R}$), et $J_1^*(v_{n-1}) = -\sqrt{2}i(f_\lambda(H) - n)v_n$.

Maintenant, on peut calculer $\ker(\delta_-)_{\lambda,1} \cap \ker{(\delta_-)_{\lambda,1}}^*$. Mais avant d'effectuer les calculs explicitement, on remarque que les vecteurs v_n constituent une base de vecteurs propres pour le groupe compact M dans $V_{\lambda+\alpha_{31}}$. Puisque $W = iH_{12}/2 - iZ_0'/3$, on obtient que

$$\exp(wW)v_n = e^{iw(\frac{f_\lambda(H)-1-2n}{2} - \frac{\alpha}{3})}v_n = e^{iw(\frac{(3f_\lambda(H)-f_\lambda(Z))}{6} - n)}v_n.$$

On a vu que $\ker(\delta_-)_{\lambda,1} \cap \ker{(\delta_-)_{\lambda,1}}^*$ est constitué des éléments $\varphi_0 \otimes \mu_0 + \varphi_1 \otimes \mu_1$ avec μ_0, $\mu_1 \in V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}_-^\infty$ qui vérifient

$$J_0.\mu_1 = J_1.\mu_0 + \mu_1$$

et

$$J_0^*.\mu_0 + J_1^*.\mu_1 = 0.$$

On peut écrire $\mu_0 = \sum_{n=0}^{f_\lambda(H)-1} v_n \otimes \phi_n$ et $\mu_1 = \sum_{n=0}^{f_\lambda(H)-1} v_n \otimes \psi_n$ avec $\phi_n, \psi_n \in \mathbb{H}_-^\infty$.

Donc, on a $J_0.\mu_1 = \sum_{n=0}^{f_\lambda(H)-1} v_n \otimes J_0(\psi_n) + \sum_{n=0}^{f_\lambda(H)-1} J_0(v_n) \otimes \psi_n$. D'après ce qui précède, on obtient que

$$J_0.\mu_1 = \sum_{n=0}^{f_\lambda(H)-1} v_n \otimes (-t\frac{\partial \psi_n}{\partial t} - t^{-2}\psi_n + \frac{f_\lambda(H) - 2n + 2\alpha + 3}{2}\psi_n).$$

De même

$$J_1.\mu_0 = \sum_{n=0}^{f_\lambda(H)-1} v_n \otimes t^{-1}\omega.\phi_n + \sqrt{2}i \sum_{n=0}^{f_\lambda(H)-1} v_{n-1} \otimes n\phi_n,$$

donc

$$J_1.\mu_0 + \mu_1 = \sum_{n=0}^{f_\lambda(H)-1} v_n \otimes (t^{-1}\omega.\phi_n + \psi_n + \sqrt{2}i(n+1)\phi_{n+1}).$$

Ici par convention $\phi_{-1} = \phi_{f_\lambda(H)} = \psi_{f_\lambda(H)} = \psi_{-1} = 0$, et cette convention s'applique dans toute la suite de la section. Donc on en déduit que l'équation

$$J_0.\mu_1 = J_1.\mu_0 + \mu_1$$

est équivalente à

$$-t\frac{\partial \psi_n}{\partial t} - t^{-2}\psi_n + \frac{f_\lambda(H) - 2n + 2\alpha + 3}{2}\psi_n = t^{-1}\omega.\phi_n + \psi_n + \sqrt{2}i(n+1)\phi_{n+1}$$

pour $0 \leq n \leq f_\lambda(H) - 1$, c'est-à-dire

$$-t\frac{\partial \psi_n}{\partial t} + (-t^{-2} + \frac{f_\lambda(H) - 2n - 2\alpha + 1}{2})\psi_n = t^{-1}\omega.\phi_n + \sqrt{2}i(n+1)\phi_{n+1}(*).$$

De la même manière, on peut obtenir que

$$J_0^*.v_0 = \sum_{n=0}^{f_\lambda(H)-1} v_n \otimes (t\frac{\partial \phi_n}{\partial t} - t^{-2}\phi_n + \frac{f_\lambda(H) - 2n + 2\alpha + 3}{2}\phi_n)$$

et

$$J_1^*.\mu_1 = \sum_{n=0}^{f_\lambda(H)-1} v_n \otimes 2t^{-1}\frac{\partial \psi_n}{\partial \omega} - \sqrt{2}i \sum_{n=0}^{f_\lambda(H)-1} v_{n+1} \otimes (f_\lambda(H) - 1 - n)\psi_n.$$

Donc

$$J_0^*.\mu_0 + J_1^*.v_1 = 0$$

est équivalente à

$$2t^{-1}\frac{\partial \psi_n}{\partial \omega} - \sqrt{2}i(f_\lambda(H) - n)\psi_{n-1} + t\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + (-t^{-2} + \frac{f_\lambda(H) - 2n + 2\alpha + 3}{2})\phi_n = 0 \ (**)$$

pour $0 \leq n \leq f_\lambda(H) - 1$.

On écrit $\phi_n = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}(t)\omega^m$ et $\psi_n = \sum_{m=0}^{+\infty} b_{m,n}(t)\omega^m$, $0 \le n \le f_\lambda(H)-1$. Donc

$$-t\frac{\partial\psi_n}{\partial t} = \sum_{m=0}^{+\infty} -tb'_{m,n}(t)\omega^m$$

$$(-t^{-2}+\frac{f_\lambda(H)-2n+2\alpha+1}{2})\psi_n = \sum_{m=0}^{+\infty}(-t^{-2}+\frac{f_\lambda(H)-2n+2\alpha+1}{2})b_{m,n}(t)\omega^m,$$

$$t^{-1}\omega.\phi_n = \sum_{m=0}^{+\infty} t^{-1}a_{m,n}(t)\omega^{m+1}$$

et

$$\sqrt{2}i(n+1)\phi_{n+1} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sqrt{2}i(n+1)a_{m,n+1}(t)\omega^m.$$

Donc de $(*)$, on déduit que

$$-tb'_{m,n}(t)+(-t^{-2}+\frac{f_\lambda(H)-2n+2\alpha+1}{2})b_{m,n}(t)-t^{-1}a_{m-1,n}(t)-$$
$$\sqrt{2}i(n+1)a_{m,n+1}(t)=0 \qquad (\triangleright)$$

pour $m \ge 0$, $0 \le n \le f_\lambda(H)-1$. Ici par convention $a_{-1,n} = b_{-1,n} = a_{m,f_\lambda(H)} = b_{m,f_\lambda(H)} = 0$ et cette convention s'applique dans toute la suite.

De même, on peut obtenir de $(**)$ que

$$ta'_{m,n}(t)+(-t^{-2}+\frac{f_\lambda(H)-2n+2\alpha+3}{2})a_{m,n}(t)-$$
$$\sqrt{2}i(f_\lambda(H)-n)b_{m,n-1}(t)+2t^{-1}(m+1)b_{m+1,n}(t)=0 \qquad (\triangleright\triangleright).$$

Puisque la variable t est strictement positive, de $(\triangleright)$ et $(\triangleright\triangleright)$, on déduit que pour m fixé, on a

$$b'_{m-n,f_\lambda(H)-1-n}(t) = -t^{-2}a_{m-n-1,f_\lambda(H)-1-n}(t)+$$
$$(-t^{-3}+\frac{2n-f_\lambda(H)+2\alpha+3}{2}t^{-1})b_{m-n,f_\lambda(H)-1-n}(t)-t^{-1}\sqrt{2}i(f_\lambda(H)-n)a_{m-n,f_\lambda(H)-n}(t)$$

et

$$a'_{m-n-1,f_\lambda(H)-1-n}(t) = t^{-1}\sqrt{2}i(1+n)b_{m-n-1,f_\lambda(H)-2-n}(t)+$$
$$(t^{-3}-\frac{2n-f_\lambda(H)+2\alpha+5}{2}t^{-1})a_{m-n-1,f_\lambda(H)-1-n}(t)-2t^{-2}(m-n)b_{m-n,f_\lambda(H)-1-n}(t).$$

Or $a_{m,f_\lambda(H)} = a_{m,-1} = b_{m,-1} = b_{m,f_\lambda(H)} = 0$. Donc pour chaque $m \ge 0$, on obtient un système différentiel $D^-_{\lambda,m}$ d'ordre 1 comme expliqué ci-après. Si $m \geqslant f_\lambda(H)$, $D^-_{\lambda,m}$ a $2f_\lambda(H)$ fonctions inconnues, et si $0 \leqslant m \leqslant f_\lambda(H)-1$, $D^-_{\lambda,m}$ a $2m+1$ fonctions inconnues. Plus précisément: si $m \ge f_\lambda(H)$ on obtient le système d'ordre 1 de $2f_\lambda(H)$ fonctions inconnues suivante:

$$(y^-_m)'(t) = (t^{-1}A^-_m + t^{-2}B^-_m + t^{-3}C^-_m)y^-_m(t) \quad (t \in]0,+\infty[) \quad (D^-_{\lambda,m}, \quad m \geqslant f_\lambda(H))$$

où

$$y_m^-(t) = \begin{pmatrix} b_{m,f_\lambda(H)-1}(t) \\ a_{m-1,f_\lambda(H)-1}(t) \\ \vdots \\ b_{m-n,f_\lambda(H)-1-n}(t) \\ a_{m-n-1,f_\lambda(H)-1-n}(t) \\ \vdots \\ b_{m-(f_\lambda(H)-1),0}(t) \\ a_{m-f_\lambda(H),0}(t) \end{pmatrix}$$

et A_m^-, B_m^- et C_m^- sont les matrices que l'on a définies auparavant.

Si $0 \leqslant m \leqslant N_1 - 1$, on obtient le système d'ordre 1 de 2m+1 fonctions inconnues suivante :

$$(y_m^-)'(t) = (t^{-1}A_m^- + t^{-2}B_m^- + t^{-3}C_m^-)y_m^-(t) \quad (t \in]0, +\infty[) \ (D_{\lambda,m}^-, \ 0 \leqslant m \leqslant f_\lambda(H)-1)$$

où

$$y_m^-(t) = \begin{pmatrix} b_{m,f_\lambda(H)-1}(t) \\ a_{m-1,f_\lambda(H)-1}(t) \\ \vdots \\ b_{m-n,f_\lambda(H)-1-n}(t) \\ a_{m-n-1,f_\lambda(H)-1-n}(t) \\ \vdots \\ b_{1,f_\lambda(H)-m}(t) \\ a_{0,f_\lambda(H)-m}(t) \\ b_{0,f_\lambda(H)-m-1}(t) \end{pmatrix}$$

et A_m^-, B_m^- et C_m^- sont les matrices que l'on a définies auparavant (pour cette raison-là, on appelle les systèmes encore $D_{\lambda,m}^-$).

On voit facilement que les systèmes ($\triangleright$) et ($\triangleright\triangleright$) sont équivalents à $D_{\lambda,m}^-$ ($m \geqslant 0$). Le point important est que les systèmes $D_{\lambda,m}^-$ sont deux à deux indépendants et toute $a_{m,n} \in C^\infty(]0, +\infty[)$ (la même chose pour $b_{m,n}$) est impliquée dans un et un seul système $D_{\lambda,m}^-$.

D'autre part, remarquons que $[W, J_0] = 0$ et $[W, J_1] = iJ_1$. On en déduit successivement que $\exp(wW).J_0 = J_0$, $\exp(wW).J_1 = e^{iw}.J_1$, $\exp(wW).\varphi_0 = \varphi_0$ et $\exp(wW).\varphi_1 = e^{-iw}\varphi_1$. D'après ce qui précède, il en résulte que

$$\exp(wW).(\varphi_0 \otimes v_{f_\lambda(H)-n-1} \otimes a_{m-n-1,f_\lambda(H)-n-1}(t)\omega^{m-n-1}) =$$

$$= e^{iw(m-\frac{(3f_\lambda(H)+f_\lambda(Z))}{6})}\varphi_0 \otimes v_{f_\lambda(H)-n-1} \otimes a_{m-n-1,N_1-n-1}(t)\omega^{m-n-1}$$

et

$$\exp(wW).(J_1^* \otimes v_{f_\lambda(H)-n-1} \otimes b_{m-n,f_\lambda(H)-n-1}(t)\omega^{m-n}) =$$

$$= e^{iw(m-\frac{(3f_\lambda(H)+f_\lambda(Z))}{6})}\varphi_1 \otimes v_{f_\lambda(H)-n-1} \otimes b_{m-n,f_\lambda(H)-n-1}(t)\omega^{m-n}.$$

Pour $m \in N$, désignons par F_m^- l'espace formé des vecteurs

$$\sum_{n=0}^{N_1-1} (\varphi_0 \otimes v_{f_\lambda(H)-n-1} \otimes a_{m-n-1,f_\lambda(H)-n-1}(t)\omega^{m-n-1} \\ +\varphi_1 \otimes v_{f_\lambda(H)-n-1} \otimes b_{m-n,f_\lambda(H)-n-1}(t)\omega^{m-n})$$

où, $a_{m-n-1,f_\lambda(H)-n-1}(t)$, $b_{m-n,f_\lambda(H)-n-1}(t)$ sont solutions de $D_{\lambda,m}^-$ avec $m \geqslant 0$. Définissons également les espaces

$$(F_m^-)^\infty = \left\{ g_m \in F_m^-; \ \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\|g_m(t)\|^2}{t} dt < +\infty \right\}.$$

Rappelons que l'on a déjà défini

$$(D_{\lambda,m}^-)^\infty = \left\{ y_m \text{ solution de } D_{\lambda,m}^-; \ \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\|y_m(t)\|^2}{t} dt < +\infty \right\}.$$

Alors il est clair que $\dim(F_m^-)^\infty = \dim(D_{\lambda,m}^-)^\infty$. D'autre part, d'après ce qui précède, on déduit facilement que pour $m \in \mathbb{N}$ et $l = (3m - \frac{(3f_\lambda(H)+f_\lambda(Z))}{2})$

$$\dim((\mathfrak{H}_{\lambda,-})^1_{\sigma_l}) = \dim((F_m^-)^\infty)$$

et pour les autres $l \in \mathbb{Z}$,

$$\dim((\mathfrak{H}_{\lambda,-})^1_{\sigma_l}) = 0.$$

Pour le cas de $(\mathfrak{H}_{\lambda,+})^1 = \ker(\delta_+)_{\lambda,1} \cap \ker(\delta_+)^*_{\lambda,1}$, le traitement est analogue. La démonstration est donc bien achevée. ■

Maintenant, il reste à trouver les dimensions des sous-espaces $(D_{\lambda,m}^\pm)^\infty$.

Or en étudiant le comportement asymptotique en 0 (pour les systmèmes $D_{\lambda,m}^\pm$), on peut montrer que le sous-espace l'on note $(E_m^\pm)^0$ des solutions $y_m(t)$ de $D_{\lambda,m}^\pm$ telles que $\int_0^{+\infty} \frac{\|y_m(t)\|^2}{t} dt$ converge au voisinage de 0 est de dimension $f_\lambda(H)+1$, si $m \geq f_\lambda(H)$, et de dimension $m+1$, si $0 \leq m < f_\lambda(H)$. De même, l'étude du comportement asymptotique en $+\infty$ nous donne que le sous-espace que l'on note $(E_m^\pm)^\infty$ des solutions $y_m(t)$ de $D_{\lambda,m}^\pm$ telles que $\int_0^{+\infty} \frac{\|y_m(t)\|^2}{t} dt$ converge au voisinage de $+\infty$ est de dimension $f_\lambda(H)$, si $m \geq f_\lambda(H)$, et de dimension m, sinon. Puisque l'analyse asymptotique dans notre cas est assez classique, on ne donne pas de détails. Cependant, on renvoie à [9] pour tous les détails.

Cependant, il est clair que $\dim(D_{\lambda,m}^\pm)^\infty = \dim((E_m^\pm)^0 \cap (E_m^\pm)^\infty)$. Or la dimension de l'espace des solutions de $D_{\lambda,m}^\pm$ est de $2f_\lambda(H)$, si $m \geq f_\lambda(H)$, et de $2m+1$, autrement. On en déduit donc que $1 \leq \dim((D_{\lambda,m}^\pm)^\infty) \leq f_\lambda(H)$, si $m \geq f_\lambda(H)$. De même, pour $0 \leq m < f_\lambda(H)$, on a $\dim(D_{\lambda,m}^\pm)^\infty \leqslant m$. Donc surtout $\dim(D_0^{\pm})^\infty = 0$.

D'après ce qui précède, on déduit que $\sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D_{\lambda,m}^{\pm})^\infty) = +\infty$. On a donc

$$\pi_\lambda|_{B_1} \cong (+\infty)\,\mathrm{T}_+ \bigoplus (+\infty)\,\mathrm{T}_-.$$

Maintenant avant de continuer à étudier $\pi_\lambda|_B$ pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe, on voudrait étudier le cas des séries discrètes holomorphes à l'aide du théorème 3.2 (le cas des séries discrètes anti-holomorphes se traite analoguement). On verra non seulement que l'on peut retrouver le résultat de Rossi-Vergne ([13], Theorem 5.22) pour $G = SU(2,1)$, mais que cette méthode est particulièrement simple.

Supposons maintenant que π_λ est une série discrète holomorphe. Comme dans la section 3, on suppose que $\lambda(H_{12}) \in \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{31}) \in \mathbb{N}^+$. Donc $f_\lambda(H) \in \mathbb{N}^+$ et $f_\lambda(Z) + f_\lambda(H)$ est un entier pair strictement négatif. De plus, il est facile de vérifier que dans ce cas $q_\lambda = 0$.

Il est bien clair que $\ker{(\delta_\pm)_{\lambda,0}}^* = \Lambda^0(\mathfrak{h}_+)^* \otimes V^{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}_\pm^\infty$. Donc $\mathfrak{H}_{\lambda,\pm}^0 = \ker{(\delta_\pm)_{\lambda,0}} \cap \ker{(\delta_\pm)_{\lambda,0}}^* = \ker{(\delta_\pm)_{\lambda,0}}$. On peut facilement voir que

$$\ker{(\delta_\pm)_{\lambda,0}} = \left\{\mu \in V^{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}_\pm^\infty;\quad J_0\mu = 0 \ \text{ et } \ J_1\mu = 0\right\}.$$

Ici les opérateurs J_0 et J_1 sont ceux que l'on a définis auparavant.

D'abord, on va calculer $\ker{(\delta_-)_{\lambda,0}}$. Écrivons $\mu = \sum_{n=0}^{N_1-1} v_n \otimes \phi_n$ avec $\phi_n \in \mathbb{H}_-^\infty$, et les $v_n \in V^{\lambda+\alpha_{31}}$ sont ceux que l'on a définis auparavant. Alors à l'aide des informations que l'on a eues pour les séries discrètes ni holomorphes ni anti-holomorphes, on obtient que les conditions $J_0\mu = 0$ et $J_1\mu = 0$ sont équivalentes à

$$-t\frac{\partial \phi_n}{\partial t} - t^{-2}\phi_n + \frac{f_\lambda(H) - 2n + 2\alpha + 3}{2}\phi_n = 0,$$

et

$$t^{-1}\omega\phi_n + \sqrt{2}i(n+1)\phi_{n+1} = 0$$

respectivement. Ici, comme pour les séries discrètes non-holomorphes $\alpha = \frac{f_\lambda(Z)}{2} - 3/2$. Donc en écrivant $\phi_n = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}(t)\omega^m$, on obtient de la première équation que $a_{m,n}(t) \in \mathbb{C}t^{\frac{f_\lambda(H)+f_\lambda(Z)}{2}-n}e^{\frac{t^{-2}}{2}}$. Or

$$\int_0^{+\infty} \frac{(|\, t^{\frac{f_\lambda(H)+f_\lambda(Z)}{2}-n}e^{\frac{t^{-2}}{2}}\,|)^2}{t}dt = +\infty.$$

Donc $\mathfrak{H}_{\lambda,-}^0 = \ker(\delta_-)_{\lambda,0} = 0$.

Maintenant, il reste à calculer $\mathfrak{H}_{\lambda,+}^0 = \ker(\delta_+)_{\lambda,0}$. Comme dans $\mathfrak{H}_{\lambda,-}^0$, en identifiant $\mathbb{H}_+$ à $\mathbb{H}_-$, on obtient que

$$\ker(\delta_+)_{\lambda,0} = \left\{\mu = \sum_{n=0}^{f_\lambda(H)-1} v_n \otimes \phi_n\right\},$$

où $\phi_n \in \mathbb{H}^{\infty}_{\pi_1}$ vérifient

$$-t\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + t^{-2}\phi_n + \frac{f_\lambda(H) - 2n + 2\alpha + 3}{2}\phi_n = 0$$

et

$$-2t^{-1}\frac{\partial \phi_n}{\partial \omega} + \sqrt{2}(n+1)i\phi_{n+1} = 0.$$

Donc, en écrivant $\phi_n = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}(t)\omega^m$, on obtient de la première équation que $a_{m,n}(t) \in \mathbb{C}t^{\frac{f_\lambda(H)+f_\lambda(Z)}{2}-n}e^{-\frac{t^{-2}}{2}}$, et de la seconde équation, on déduit que $\phi_{f_\lambda(H)-1} = a_{0,f_\lambda(H)-1}$ et $a_{m,n}(t) = \sqrt{2}(n+1)it\frac{a_{m-1,n+1}(t)}{2m}$. On peut vérifier directement que si $a_{m-1,n+1}(t) \in \mathbb{C}t^{\frac{f_\lambda(H)+f_\lambda(Z)}{2}-(n+1)}e^{-\frac{t^{-2}}{2}}$, alors $\sqrt{2}(n+1)it\frac{a_{m-1,n+1}(t)}{2m} \in \mathbb{C}t^{\frac{f_\lambda(H)+f_\lambda(Z)}{2}-n}e^{-\frac{t^{-2}}{2}}$. D'autre part, puisque $\frac{f_\lambda(H)+f_\lambda(Z)}{2}$ est un entier strictement négatif, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{(|\, t^{\frac{f_\lambda(H)+f_\lambda(Z)}{2}-n}e^{-\frac{t^{-2}}{2}}\,|)^2}{t}dt < +\infty.$$

On en déduit donc $\mathfrak{H}^0_{\lambda,+} = \ker(\delta_+)_{\lambda,0} \cong \bigoplus_{n=0}^{f_\lambda(H)} \mathbb{C}v_n = V^{\lambda+\alpha_{31}}$. Donc d'après le théorème 3.2, on déduit le résultat suivant:

Proposition 4.3. *Soit π_λ une série discrète holomorphe de $G = SU(2,1)$ avec $\lambda \in i\mathfrak{t}^*$, son paramètre de Harish-Chandra, vérifiant que $\lambda(H_{12}) \in \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{31}) \in \mathbb{N}^+$. Soit $f_\lambda = -i\lambda$. Alors on a*

$$\pi_\lambda|_B \cong \bigoplus_{m=0}^{f_\lambda(H)-1} \mathrm{T}_{(\frac{3f_\lambda(H)-f_\lambda(Z)}{2}-3m),-},$$

et

$$\pi_\lambda|_{B_1} \cong f_\lambda(H).\mathrm{T}_-.$$

Cette proposition va aussi servir dans la section suivante à trouver la décomposition explicite de $\pi_\lambda|_B$ pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe.

Pour π_λ anti-holomorphe, la formule pour la décompostion de $\pi_\lambda|_B$ (resp. $\pi_\lambda|_{B_1}$) est tout à fait similaire, sauf que les sous-représentations intervenant sont des "$\mathrm{T}_{n,+}$" (resp. T_+). On laisse le lecteur intéressé traiter ce cas en détail. Cependant il faut souligner que la formule pour $\pi_\lambda|_B$ (quel que soit π_λ) a un sens géométrique dans le cadre de la méthode des orbites (voir [10]).

4.2. Interprétation et application de résultats de Fabec et de Kraljević.

Dans cette section, on va compléter l'étude de la décomposition de $\pi_\lambda|_B$ pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe en utilisant des résultats de Fabec et ceux de Kraljević. En les combinant avec les résultats des sections précédentes, on arrive à décomposer explicitement $\pi_\lambda|_B$.

Soit $R^{p,\alpha}$ la série principale de $G = SU(2,1)$ par rapport à B, où $p \in \widehat{M}$ (c'est-à-dire est un caractère unitaire de M) et $\alpha \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. Rappelons que $R^{p,\alpha}$ est la représentation induite par la représentation de B de dimension 1 : $man \mapsto \exp((\alpha+\rho)(\log a)p(m))$, où $m \in M$, $a \in A$, $n \in N$ et $\rho = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}|_{\mathfrak{n}})$. Comme dans [7], on peut identifier $\widehat{M}$ au réseau des formes linéaires f dans $\mathfrak{m}^*$ avec $f(W) \in \mathbb{Z}/3$, ceci nous permet d'identifier $\widehat{M}$ à $\mathbb{Z}/3$ dans la suite. On identifie également α à $\alpha(S) \in \mathbb{C}$, où $S \in \mathfrak{a}$ a été défini dans la section 3.

Kraljević ([7] et [8]) a déterminé explicitement tous les sous-quotients irréductibles unitarisables pour $R^{p,\alpha}$. En particulier, il a donné une condition necessaire et suffisante pour qu'un sous-quotient irréductible unitarisable soit une série discrète et il a aussi montré que $R^{p,\alpha}$ a les même sous-quotients irréductibles (unitarisables ou pas) que $R^{p,-\alpha}$.

Fabec ([2]) a construit pour toute $R^{p,\alpha}$ deux sous-espaces fermés invariants $N_2 \subset N_1$. Notamment il a démontré que

Théorème 4.4. *Si $\alpha = 3p+2k$, avec $3p+k \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$ (ici $k \in \mathbb{Z}$), alors N_2 muni de l'action induite par $R^{p,\alpha}$ est unitarisable. De plus en notant encore ce sous-quotient unitaire $R^{p,\alpha}$, on a*

$$R^{p,\alpha}|_B \cong \{ \sum_{n \geqslant 3p+k}^{+\infty} \tau^{p-n,+} \oplus \sum_{n \geqslant k}^{+\infty} \tau^{p+n,-} \} .$$

Ici

$$\tau^{m,+} \cong \mathrm{T}_{3m,-}$$

et

$$\tau^{m,-} \cong \mathrm{T}_{3m,+},$$

$\forall m \in \mathbb{Z}/3$.

Remarque. Dans l'article de Fabec ([2]), il y a une erreur sur un indice de somme dans le théorème concerné (voir le Theorem 6.3 de [2]), et le théorème précédent est la version corrigée.

Or d'après Kraljević (voir Theorem 6, Proposition 2 et (iv) de Proposition 3 dans [8]), lorsque $3p+k > 1$ et $k > 1$ ($k \in \mathbb{Z}$), on déduit que $R^{p,\alpha}$ a un seul sous-quotient unitarisable irréductible (et il correspond à "$\pi_{1,1}(r)$" avec "$j(p,\alpha) = 1, j(p,-\alpha) = 2$" dans [8]). Donc on en déduit qu'il est exactement celui dans le théorème précédent. D'autre part, en appliquant le Theorem 6 de [8] , on peut montrer qu'il correspond à une série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe. Plus précisément, le paramètre de Harish-Chandra associé λ vérifie que $\lambda(H_{12}) = \alpha$, $\lambda(H_{13}) = 3p+k$ et $\lambda(H_{32}) = k$. Donc en appliquant le théorème précédent de Fabec, *on peut décomposer explicitement toutes ces séries discrètes non-holomorphes dont le paramètre de Harish-Chandra λ vérifie $\lambda(H_{13}) > 1$ et $\lambda(H_{32}) > 1$*. Du coup il reste à décomposer les séries discrètes non-holomorphes $\pi_\lambda|_B$ avec $\lambda(H_{13}) = 1$ ou $\lambda(H_{32}) = 1$.

Maintenant, on considère $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k \neq 0$ et $k \neq -1$. D'après ([7]), on sait que $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$ a les même sous-quotients irréductibles que

$R^{\frac{2k+1}{3},1}$. Or on peut déduire de ([8]) que $R^{\frac{2k+1}{3},1}$ a trois sous-quotients irréductibles unitarisables. Plus précisément, si $k \geq 1$, alors il s'agit de la série discrète holomorphe dont le paramètre de Harish-Chandra associé λ vérifie que $\lambda(H_{12}) = k$, $\lambda(H_{31}) = 1$, de la série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe dont le paramètre de Harish-Chandra associé λ_k vérifie que $\lambda_k(H_{12}) = k+1$, $\lambda_k(H_{13}) = 1$ et d'une représentation unitaire irréductible qui n'est pas une série discrète. Et si $k \leq -2$, alors il s'agit de la série discrète anti-holomorphe dont le paramètre de Harish-Chandra associé λ vérifie que $\lambda(H_{12}) = -1-k$, $\lambda(H_{23}) = 1$, de la série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe dont le paramètre de Harish-Chandra associé λ_k vérifie que $\lambda_k(H_{12}) = -k$, $\lambda_k(H_{32}) = 1$ et d'une représentation unitaire irréductible qui n'est pas une série discrète. Ainsi il est clair que chaque série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe dont le paramètre de Harish-Chandra associé λ vérifie que $\lambda(H_{13}) = 1$ ou $\lambda(H_{32}) = 1$ figure comme un sous-quotient irréductible dans une (et une seule) $R^{\frac{2k+1}{3},1}$ (donc dans une et une seule $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$). Or d'après le Theorem 6.5 de [2], on sait que $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$ est unitarisable sur N_2. De plus notant $R_{N_2}^{\frac{2k+1}{3},-1}$ le sous-quotient sur N_2, on a

si $k \geq 1$,

$$R_{N_2}^{\frac{2k+1}{3},-1}|_B \cong \tau^{-\frac{k-1}{3},+},$$

et si $k \leq -2$,

$$R_{N_2}^{\frac{2k+1}{3},-1}|_B \cong \tau^{-\frac{k+2}{3},-}.$$

Donc on peut déduire de la proposition 4.3, du théorème 4.2 et de la section 4.1 que le sous-quotient unitaire sur N_2 est la représentation unitaire irréductible qui n'est pas une série discrète. D'autre part, d'après le Theorem 6.6 de [2], $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$ est unitarisable sur N_1/N_2. De plus, notons $R_{12}^{\frac{2k+1}{3},-1}$ le sous-quotient unitarisable sur N_1/N_2, alors

si $k \geq 1$, on a

$$R_{12}^{\frac{2k+1}{3},-1}|_B \cong \sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} \tau^{(\frac{2k+1}{3}+n),-} \oplus \sum_{n\geqslant 0}^{k-1} \tau^{(\frac{2k+1}{3}-n),+} \oplus \sum_{n\geqslant k+1}^{+\infty} \tau^{(\frac{2k+1}{3}-n),+} ;$$

si $k \leq -2$, on a

$$R_{12}^{\frac{2k+1}{3},-1}|_B \cong \sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} \tau^{(\frac{2k+1}{3}-n),+} \oplus \sum_{n\geqslant 0}^{-k-2} \tau^{(\frac{2k+1}{3}+n),-} \oplus \sum_{n\geqslant -k}^{+\infty} \tau^{(\frac{2k+1}{3}+n),-} .$$

Donc la proposition 4.3 nous permet de déduire que le sous-quotient unitarisable de $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$ sur N_1/N_2 contient forcément la série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe de paramètre λ_k. Or d'après le théorème 4.2 et la section 4.1, on sait que si $k \geq 1$, alors la série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe de paramètre λ_k ne contient pas le terme "$\tau^{(\frac{2k+1}{3}),+}$" et si $k \leq -2$, elle ne contient pas le terme "$\tau^{(\frac{2k+1}{3}),-}$". Donc on en déduit que le sous-quotient unitarisable de $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$ sur N_1/N_2 est la somme de la série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe et de la série discrète holomorphe (ou anti-holomorphe). Donc en appliquant encore une fois la proposition 4.3, on peut décomposer explicitement dans cette situation $\pi_\lambda|_B$. On arrive donc à décomposer explicitement $\pi_\lambda|_B$, pour toutes les séries discrète non-holomorphes π_λ (de $G = SU(2,1)$). On résume tout ceci dans le théorème suivant:

Théorème 4.5. *Pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe avec $\lambda(H_{12}) = n_1 \in \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{13}) = n_2 \in \mathbb{N}^+$ $(n_1 > n_2)$, on a que*

$$\pi_\lambda|_B \cong \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{T}_{[3m+2n_1-n_2],+} \oplus \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{T}_{[-(3m+n_1+n_2)],-},$$

c'est-à-dire

$$\pi_\lambda|_B \cong \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{T}_{[3m+\frac{3f_\lambda(H)-f_\lambda(Z)}{2}],+} \oplus \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{T}_{[-(3m+\frac{3f_\lambda(H)+f_\lambda(Z)}{2})],-}.$$

Donc on en déduit aussi une nouvelle fois le résultat que l'on a obtenu dans la section 3.2:

$$\pi_\lambda|_{B_1} \cong (+\infty)\,\mathrm{T}_+ \bigoplus (+\infty)\,\mathrm{T}_-.$$

4.3. Conséquences sur $(D^{\pm}_{\lambda,m})^\infty$.

Dans le théorème 4.2, on a vu que pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe avec $f_\lambda(H) \in \mathbb{N}^+$, $f_\lambda(H) + f_\lambda(Z) \in 2\mathbb{N}^+$ et $|f_\lambda(H)| > |f_\lambda(Z)|$, on a que

$$\pi_\lambda|_B \cong \sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D^{-}_{\lambda,m})^\infty).\mathrm{T}_{[3m-\frac{(3f_\lambda(H)+f_\lambda(Z))}{2}],+} \oplus$$

$$\oplus \sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D^{+}_{\lambda,m})^\infty).\mathrm{T}_{[-(3m+\frac{f_\lambda(Z)-3f_\lambda(H)}{2})],-}.$$

Donc d'après le théorème 4.5, on déduit que

Proposition 4.6. *Pour les systèmes différentiels $D^{\pm}_{\lambda,m}$ et les sous-espaces $(D^{\pm}_{\lambda,m})^\infty$ définis dans la section 3.2, on a*

$$dim((D^{\pm}_{\lambda,m})^\infty) = 0, \quad si \;\; 0 \leqslant m \leqslant f_\lambda(H) - 1$$

et

$$dim((D^{\pm}_{\lambda,m})^\infty) = 1, \quad si \;\; m \geqslant f_\lambda(H).$$

Ce résultat semble difficile à obtenir par des méthodes "directes".

Remerciement. Cet article est une partie de ma thèse. Je tiens à remercier P. Torasso de m'avoir initié dans le domaine de la théorie des représentations et l'analyse harmonique non-commutative. Je le remercie également pour ses suggestions et remarques bien utiles sur cet article. Ma reconnaissance va aussi à M. Duflo avec qui j'ai eu des discussions importantes. Je voudrais aussi remercier D. Vogan et M. Vergne d'avoir fait certaines remarques éclairantes. Je remercie C. Sabbah pour son aide déterminante dans l'étude des systèmes différentiels rencontrés dans ce travail. Je remercie aussi T. Kobayashi pour des discussions bien utiles. Enfin, mon merci va à B. Krötz pour ses suggestions sur l'aspect stylistique et structural de cet article.

References

[1] Duflo, M., and J. A. Vargas, *Branching laws for square integrable representations*, Proc. Japan Acad. Math. Sci. Ser. A **86** (2010), 49–54.

[2] Fabec, R. C., *Homogeneous distributions on the Heisenberg group and representations of $SU(2,1)$*, Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), 351–391.

[3] Hersant, A., *Formes harmoniques et cohomologie relative des algèbres de Lie*, J. Reine Angew. Math. **344** (1983), 71–86.

[4] Khalgui, M. S., and P. Torasso, *La formule de Plancherel pour les groupes de Lie presque algébriques réels*, J. Funct. Anal. **235** (2006), 449–542.

[5] Knapp, A. W., "Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples," Reprint of the 1986 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. xx+773 pp.

[6] —, "Lie Groups Beyond an Introduction," Progress in Mathematics **140**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996. xvi+604 pp.

[7] Kraljević, H., *Representations of the universal convering group of the group $SU(n,1)$*, Glasnik Mat. Ser. III **8(28)** (1973), 23-72.

[8] —, *On representations of the group $SU(n,1)$*, Trans. Amer. Math. Soc. **221** (1976), 433–448.

[9] Liu, G., "Restriction des séries discrètes de $SU(2,1)$ à un sous-groupe exponentiel maximal et à un sous-groupe de Borel," Thèse de doctorat, Université de Poitiers, disponible sur http://arxiv.org/abs/1208.0992.

[10] —, *Sur la notion* faiblement propre *dans la conjecture de Duflo*, J. Funct. Anal. **264** (2013), 403–412.

[11] Narasimhan, M. S., and K. Okamoto, *An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for hermitian symmetric pairs of non-compact type*, Ann. of Math. (2) **91** (1970), 486–511.

[12] Rosenberg, J., and M. Vergne, *Harmonically induced representations of solvable Lie groups*, J. Funct. Anal. **62** (1985), 8–37.

[13] Rossi, H., and M. Vergne, *Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group*, J. Funct. Anal. **13** (1973), 324–389.

[14] Schmid, W., *On a conjecture of Langlands*, Ann. of Math. (2) **93** (1971), 1–42.

[15] —, *L^2-cohomology and the discrete series*, Ann. of Math. (2) **103** (1976), 375–394.

Gang Liu
Institut für Mathematik
Universität Paderborn
Warburger Str. 100
33098 Paderborn, Germany
gliu@math.uni-paderborn.de

Received February 16, 2013
and in final form April 30, 2013