

Stabilité des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(n)$

Kais Ammari*

Communicated by J. Faraut

Résumé. Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Dans cet article, nous montrons l'équivalence entre la quasi-réductivité et la stabilité pour les sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie orthogonales ainsi que pour certaines algèbres de Lie qui stabilisent une forme bilinéaire alternée de rang maximal et un drapeau en position générique.

Abstract. Let $\mathbb{K}$ be an algebraically closed field of characteristic 0. In this paper, we prove the equivalence between quasi-reductivity and stability for parabolic subalgebras of orthogonal Lie algebras and for certain Lie algebras which stabilize an alternating bilinear form of maximal rank and a flag in generic position.

Mathematics Subject Classification 2010: 17B45, 17B20, 22E60.

Key Words and Phrases: Action coadjointe, algèbre de Lie stable, algèbre de Lie quasi-réductive, forme linéaire stable, forme linéaire fortement régulière.

1. Introduction

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Les algèbres de Lie considérées sont définies et de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique et G un groupe de Lie algébrique affine connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On munit $\mathfrak{g}^*$, l'espace dual de $\mathfrak{g}$, des actions coadjointes de $\mathfrak{g}$ et de G . étant donnée une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$, on note $\mathfrak{g}(g)$ son stabilisateur dans $\mathfrak{g}$. On identifie $\mathfrak{g}(g)/\mathfrak{z}$, où $\mathfrak{z}$ désigne le centre de $\mathfrak{g}$, avec son image dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Définition 1.1. Une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est dite de type réductif si son stabilisateur dans $\mathfrak{g}$ pour la représentation coadjointe, modulo $\mathfrak{z}$, est une algèbre de Lie réductive dont le centre est formé d'éléments semi-simples dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

De manière équivalente, cela revient à demander que le groupe $G(g)/Z_{\mathfrak{g}}$ soit réductif, où $G(g)$ désigne le stabilisateur de g dans G et $Z_{\mathfrak{g}}$ le centralisateur de $\mathfrak{g}$ dans G .

*Ce travail a bénéficié du soutien des universités de Tunis El-Manar et Poitiers, ainsi que du projet CMCU franco-tunisien PHC G1504 "Théorie de Lie, Systèmes intégrables, analyse stochastique" et du projet Erasmus Mundus Al-Idrisi.

Définition 1.2. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite quasi-réductive si elle possède une forme linéaire de type réductif $g \in \mathfrak{g}^*$.

La notion de quasi-réductivité a été introduite par Duflo dans [5] (voir également [6]) pour son importance dans la théorie des représentations. Beaucoup d'algèbres de Lie sont quasi-réductives. Par exemple, si $\mathfrak{g}$ est réductive, $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive puisque $0 \in \mathfrak{g}^*$ est de type réductif. De plus, les sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie simple $\mathfrak{s}$ de type A et C sont quasi-réductives d'après un résultat de Panyushev (voir [12]). Par contre, ceci n'est plus vrai pour les sous-algèbres paraboliques pour $\mathfrak{s} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ avec $n \geq 7$. Récemment, dans [6], Duflo, Khalgui et Torasso ont donné une caractérisation des sous-algèbres de Lie paraboliques de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ qui sont quasi-réductives (voir [6]).

Tauvel et Yu ont étudié dans [14, ch.40] une classe d'algèbres de Lie reliée à celle des algèbres de Lie quasi-réductives:

Définition 1.3. Une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est dite stable s'il existe un voisinage V de g dans $\mathfrak{g}^*$ tel que, pour toute forme linéaire $f \in V$, les stabilisateurs $\mathfrak{g}(g)$ et $\mathfrak{g}(f)$ soient conjugués par le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$.

Définition 1.4. Une algèbre de Lie est dite stable si elle admet une forme linéaire stable.

La notion de stabilité a été introduite par Kosmann et Sternberg dans [10]. Il est clair qu'une forme linéaire stable est régulière. Ceci a été notre principale motivation pour étudier les formes linéaires stables. D'autre part, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quasi-réductive, elle admet des formes linéaires régulières de type réductif lesquelles sont stables (voir [6]). Une algèbre de Lie quasi-réductive est donc stable. Par contre, il existe des algèbres de Lie stables qui ne sont pas quasi-réductives (voir exemple 2.12).

Dans [13], Tauvel et Yu ont donné un exemple d'une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{so}(8, \mathbb{K})$ qui n'admet aucune forme linéaire stable qui est en particulier non quasi-réductive. La partie (ii) de la conjecture 5.6 de [12] revient à affirmer qu'une sous-algèbre biparabolique d'une algèbre de Lie réductive est stable si et seulement si elle est quasi-réductive. Le but principal de ce travail est de montrer cette assertion pour le cas des sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie orthogonale (voir théorème 6.3). Pour démontrer ceci, nous utilisons les résultats de [6] concernant la classification des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ qui sont quasi-réductives.

Dans [8], Dvorsky introduit certaines algèbres de Lie, notées $\mathfrak{r}_\gamma$, qui stabilisent une forme bilinéaire alternée de rang maximal et un drapeau en position générique. Dans [6], Duflo, Khalgui et Torasso constatent que la classification des sous-algèbres de Lie paraboliques des algèbres de Lie orthogonales se ramène à déterminer parmi ces sous-algèbres de Lie $\mathfrak{r}_\gamma$ celles qui sont quasi-réductives. Dans ce travail, on démontre qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{r}_\gamma$ est stable si et seulement si elle est quasi-

réductive (voir théorème 4.9). Pour démontrer ceci, nous utilisons les résultats de [6] concernant la classification de ces algèbres de Lie qui sont quasi-réductives.

Pour une algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{g}$, nous ramenons l'étude de la stabilité de $\mathfrak{g}$ au cas de rang nul (voir proposition 3.1 et corollaire 3.2). Ceci permet de ramener également l'étude de la stabilité au cas de rang nul pour les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ (voir 5) ainsi que pour les algèbres de Lie $\mathfrak{r}_V$ (voir preuve du théorème 4.9).

2. Stabilité des algèbres de Lie algébriques.

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle. Par algèbre de Lie algébrique, nous entendons une algèbre de Lie qui soit l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique affine connexe défini sur $\mathbb{K}$.

Si $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique affine, on note ${}^u\mathbf{G}$ le radical unipotent de $\mathbf{G}$ $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, ${}^u\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de ${}^u\mathbf{G}$. Rappelons que $\mathbf{G}$ admet une décomposition de *Levi*: il existe un sous-groupe réductif $\mathbf{R} \subset \mathbf{G}$, appelé sous-groupe de *Levi* de $\mathbf{G}$, dont la classe de conjugaison modulo ${}^u\mathbf{G}$ est uniquement déterminée, tel que $\mathbf{G} = \mathbf{R} {}^u\mathbf{G}$. Au niveau des algèbres de Lie, on a la décomposition de *Levi* $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus {}^u\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{r}$ est un facteur réductif de $\mathfrak{g}$ et que ${}^u\mathfrak{g}$ est son radical unipotent.

2.1. Formes fortement régulières.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}^*$ son dual. On fait opérer $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^*$ au moyen de la représentation coadjointe. Ainsi, si $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $g \in \mathfrak{g}^*$, on a

$$(X.g)(Y) = g([Y, X]).$$

Avec les notations précédentes, on définit une forme bilinéaire alternée Φ_g sur $\mathfrak{g}$ par:

$$\Phi_g(X, Y) = g([X, Y]).$$

Le noyau de Φ_g est égal à $\mathfrak{g}(g)$. L'entier

$$\text{ind}(\mathfrak{g}) = \inf\{\dim \mathfrak{g}(g); g \in \mathfrak{g}^*\}$$

est appelé l'indice de $\mathfrak{g}$.

L'indice de $\mathfrak{g}$, noté $\text{ind}\mathfrak{g}$, est donc la dimension minimale des stabilisateurs dans $\mathfrak{g}$ d'un élément de $\mathfrak{g}^*$ pour l'action coadjointe. Il a été introduit par Dixmier dans [3] pour son importance dans la théorie des représentations et la théorie des orbites. De plus, l'indice de $\mathfrak{g}$ est le degré de transcendance du corps des fractions rationnelles G -invariantes sur $\mathfrak{g}^*$.

Définition 2.1. Une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est dite régulière si la dimension de son stabilisateur dans $\mathfrak{g}$ pour l'action coadjointe est égale à l'indice de $\mathfrak{g}$.

Remarque 2.2. Il est bien connu que l'ensemble $\mathfrak{g}_{reg}^*$ des éléments réguliers de $\mathfrak{g}^*$ est un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{g}^*$.

Définition 2.3. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique et $\mathbf{G}$ un groupe algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est dite fortement régulière si elle est régulière, auquel cas $\mathfrak{g}(g)$ est une algèbre de Lie commutative (voir [7]), et si de plus le tore j_g , unique facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$, est de dimension maximale lorsque g parcourt l'ensemble des formes régulières.

Cette définition est due à Duflo (voir [5]).

Remarque 2.4. Il est bien connu que l'ensemble des formes fortement régulières est un ouvert de Zariski $\mathbf{G}$ -invariant non vide de $\mathfrak{g}^*$. Les tores j_g , $g \in \mathfrak{g}^*$ sont appelés les sous-algèbres de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$. Ils sont deux à deux conjugués sous l'action du groupe adjoint connexe de $\mathfrak{g}$.

Les deux résultats de la remarque précédente sont énoncés sans démonstration dans [4] (pour la démonstration voir [2]).

Définition 2.5. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique sur $\mathbb{K}$. On appelle rang de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ et on note $\text{rang } \mathfrak{g}$ la dimension commune de ses sous-algèbres de Cartan-Duflo.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique sur $\mathbb{K}$, $\mathfrak{n}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans ${}^u\mathfrak{g}$, $g \in \mathfrak{g}^*$ une forme linéaire fortement régulière, n la restriction de g à $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{h}$ le stabilisateur de n dans $\mathfrak{g}$ et h la restriction de g sur $\mathfrak{h}$.

Lemme 2.6. (Voir [5, I.16]) *On garde les notations précédentes. Alors, on a*

- (i) $\exp(\mathfrak{n}(n)).g = g + (\mathfrak{h} + \mathfrak{n})^\perp$.
- (ii) $\mathfrak{h}(h) = \mathfrak{g}(g) + \mathfrak{n}(n)$.

2.2. Algèbres de Lie quasi-réductives et algèbres de Lie stables

Remarque 2.7. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{z}$ son centre, $\mathbf{G}$ le groupe algébrique connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathbf{Z}$ son centre. Si $g \in \mathfrak{g}^*$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) g est de type réductif ,
- (ii) $\mathbf{G}(g)/\mathbf{Z}$ est réductif ,
- (ii) $\mathfrak{g}(g)/\mathfrak{z}$ est réductive ,
- (iv) ${}^u(\mathbf{G}(g)) \subset \mathbf{Z}$,
- (v) ${}^u(\mathfrak{g}(g)) \subset \mathfrak{z}$.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quasi-réductive, les formes fortement régulières sont de type réductif (Voir[6]), on voit donc que $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive si et seulement si $\text{ind } \mathfrak{g} = \text{rang } \mathfrak{g} + \dim {}^u\mathfrak{z}$

Exemples 2.8. Voici quelques exemples d'algèbres de Lie quasi-réductives.

- Toute algèbre de Lie réductive est quasi-réductive puisque la forme linéaire $0 \in \mathfrak{g}^*$ est de type réductif.
- Toutes les sous-algèbres de Borel d'une algèbre de Lie simple sont quasi-réductives (Kostant [11], non publié, voir [9]).
- Les sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie simple $\mathfrak{s}$ de type A ou C sont quasi-réductives (Panyushev [12]).

Remarque 2.9. Pour le cas des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$, $n \geq 7$, Panyushev dans [12] et Dvorsky dans [8] présentent de nombreux exemples de sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ qui sont quasi-réductives. Dans [6], on trouve une caractérisation des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ qui sont quasi-réductives. De plus, les sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie simple exceptionnelle $\mathfrak{s}$ ne sont pas toujours quasi-réductives. Dans [1], Baur et Moreau ont terminé la classification des sous-algèbres paraboliques quasi-réductives dans le cas des algèbres de Lie simples exceptionnelles.

Concernant la stabilité, on a le résultat suivant qui nous sera utile.

Lemme 2.10. (Voir [13]) *Soit f un élément de $\mathfrak{g}^*$. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie algébrique, on a*

$$f \text{ est stable si et seulement si } [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(f)] \cap \mathfrak{g}(f) = \{0\}.$$

Remarque 2.11. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quasi-réductive, l'ensemble des formes fortement régulières est égal à l'ensemble des formes linéaires régulières de type réductif. Exactement, c'est l'ensemble des $g \in \mathfrak{g}^*$ telles que $\mathfrak{g}(g) = \mathfrak{j} \oplus {}^u\mathfrak{z}$, avec $\mathfrak{j}$ un tore et $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$. Par suite, il résulte que toute algèbre de Lie quasi-réductive est stable. Cependant, il existe des algèbres de Lie stables qui ne sont pas quasi-réductives.

Exemple 2.12. Voici un exemple d'algèbre de Lie stable qui n'admet aucune forme linéaire de type réductif.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie produit semi-direct de $\mathfrak{so}(2)$ par $\mathbb{K}^2$ de sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{K}^2$, le crochet étant donné par

$$[tW + v, zW + v'] = tW.v' - zW.v, \quad t, z \in \mathbb{K}, \quad v, v' \in \mathbb{K}^2,$$

où $\mathfrak{so}(2) = \mathbb{K}W$, avec $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie aisément que le centre de $\mathfrak{g}$ est trivial. Par suite, $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive si et seulement si $\text{ind} \mathfrak{g} = \text{rang} \mathfrak{g}$. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$, n la restriction de g au radical unipotent ${}^u\mathfrak{g} = \mathbb{K}^2$ de $\mathfrak{g}$. On suppose que $n \neq 0$.

Alors, on a $X = tW + v \in \mathfrak{g}(g)$ si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{K}$ et $v' \in \mathbb{K}^2$, $\langle n, tW.v' - zW.v \rangle = 0$.

Faisant $z = 0$, on voit que si $X \in \mathfrak{g}(g)$, alors pour tout $v' \in \mathbb{K}^2$, on a

$$t \langle n, W.v' \rangle = 0.$$

Il suit alors de ce qui précède que

$$X = t W + v \in \mathfrak{g}(g) \text{ si et seulement si } t = 0 \text{ et } \langle n, z W.v \rangle = 0 \text{ pour tout } z \in \mathbb{K}.$$

Par suite, $\mathfrak{g}(g) = (W.n)^\perp \subset {}^u\mathfrak{g}$. Ceci montre que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est non quasi-réductive.

D'autre part, soit $O = \{n \in ({}^u\mathfrak{g})^* / \langle n, e_1 \rangle^2 + \langle n, e_2 \rangle^2 \neq 0\}$, avec (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{K}^2$. On vérifie aisément que O est un ouvert de Zariski non vide. Si $n, n' \in O$, il existe $k \in \mathbf{SO}(2)$ tel que $k.\mathbb{K}n = \mathbb{K}n'$. Ceci montre que $\mathfrak{g}$ est stable.

3. Réduction au cas de rang nul

Nous allons maintenant énoncer la proposition suivante qui permet de ramener l'étude de la stabilité des algèbres de Lie algébriques aux algèbres de Lie algébriques de rang nul et qui nous sera utile pour la suite.

Soit $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} \oplus [\mathfrak{j}, \mathfrak{g}]$, où $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ désigne le centralisateur de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}$. On identifie le dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ à l'orthogonal de $[\mathfrak{j}, \mathfrak{g}]$ dans $\mathfrak{g}^*$ qui n'est autre que $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$, l'ensemble des point fixes de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}^*$.

Proposition 3.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique, $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ le centralisateur de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors, $\mathfrak{g}$ est stable si et seulement si $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ est stable.*

Preuve. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique admettant des formes stables. Alors l'ensemble $\mathfrak{g}_s^*$ des formes stables est un ouvert de Zariski non vide. Par suite, $\mathfrak{g}_s^* \cap \mathfrak{g}_r^*$ est un ouvert de Zariski non vide, où $\mathfrak{g}_r^*$ est l'ouvert de Zariski des formes fortement régulières.

Soit $g \in \mathfrak{g}_s^* \cap \mathfrak{g}_r^*$ et $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}(g)$ le facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$. Alors $g \in \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$ et g est une forme stable dans $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$. En effet:

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}(g) = \mathfrak{g}(g) \text{ et } [\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}, \mathfrak{g}(g)] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)].$$

Réciproquement, soit $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$ et supposons que $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ admette des formes stables. Alors $(\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}})_s \cap \mathfrak{g}_r^*$ est un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$. Soit $g \in (\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}})_s \cap \mathfrak{g}_r^*$. Alors on a

$$\mathfrak{g}(g) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] = \mathfrak{g}(g) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)]^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{g}(g) \cap [\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}, \mathfrak{g}(g)] = \{0\},$$

de sorte que g est stable pour $\mathfrak{g}$. D'où la proposition ■

Corollaire 3.2. *Soit maintenant $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1} \subset \mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ l'idéal orthogonal de $\mathfrak{j}$ pour la forme $(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)$. Alors $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1}$ et il est clair que $g \in \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$ est une forme stable si et seulement si $g' = g|_{\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1}}$ est une forme stable pour $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1}$.*

Il suit de ce qui précède que $\mathfrak{g}$ est stable si et seulement si $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1}$ est stable. Comme $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1}$ est de rang nul, on se ramène donc à étudier la stabilité pour les algèbres de Lie de rang nul.

4. Cas des algèbres de Lie $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$

Dans [6], Dufflo, Khalgui et Torasso constatent que la classification des sous-algèbres paraboliques quasi-réductives des algèbres de Lie simples classiques se ramène à déterminer parmi les algèbres de Lie qui stabilisent une forme bilinéaire alternée de rang maximal et un drapeau en position générique, celles qui sont quasi-réductives. Le but de ce numéro est de caractériser parmi ces sous-algèbres celles qui sont stables.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et soit

$$\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$$

un drapeau de V . On désigne par $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}(V)$ constituée des endomorphismes qui laissent invariant $\mathcal{V}$ et par $\mathbf{Q}_{\mathcal{V}}$ le sous-groupe algébrique connexe de $\mathbf{GL}(V)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}}$.

Définition 4.1. Soient V un espace vectoriel non nul de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de V et ξ une forme bilinéaire alternée sur V . On dit que le drapeau $\mathcal{V}$ est générique relativement à ξ ou que la forme ξ est générique relativement à $\mathcal{V}$, si pour $1 \leq i \leq t$, la restriction de ξ à V_i est de rang maximum, à savoir $2[\frac{1}{2} \dim V_i]$, et $V_i^{\perp \xi} \cap V_{i-1} = \{0\}$ où $V_i^{\perp \xi}$ désigne l'orthogonal de V_i dans V relativement à ξ .

Définition 4.2. Soient V un espace vectoriel non nul de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $b = (e_1, \dots, e_r)$ une base de V et

$$\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$$

un drapeau de V . On dit que la base b est adaptée au drapeau $\mathcal{V}$, si pour tout $1 \leq i \leq t$ l'espace V_i est engendré par la famille $(e_1, \dots, e_{\dim V_i})$.

Lemme 4.3. (Voir [6, Lemme 4.2.1]) *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de V . Alors*

(i) *une forme $\xi \in \bigwedge^2 V^*$ est générique relativement à $\mathcal{V}$, si et seulement s'il existe une base $e_1, \dots, e_r$ de V adaptée au drapeau $\mathcal{V}$ telle que, notant $e_1^*, \dots, e_r^*$ la base duale, on ait $\xi = \sum_{1 \leq 2i \leq r} e_{2i-1}^* \wedge e_{2i}^*$.*

(ii) *l'ensemble des formes bilinéaires alternées ξ sur V qui sont génériques relativement à $\mathcal{V}$ est une orbite ouverte sous l'action de $\mathbf{Q}_{\mathcal{V}}$ dans $\bigwedge^2 V^*$.*

Définition 4.4. Soit $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau. On note $h = h(\mathcal{V})$ le nombre d'indices i tels que $1 \leq i \leq t-1$ et $\dim V_i$ et $\dim V_{i+1}$ soient tous deux impairs. On dit que le drapeau $\mathcal{V}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$, si deux espaces consécutifs de la suite $\mathcal{V}$ ne peuvent être tous deux de dimension impaire, c'est à dire $h(\mathcal{V}) = 0$.

Définition 4.5. Soit $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de V . On dit que le drapeau $\mathcal{V}$ vérifie la condition $(*)$, si, pour $1 \leq i \leq t-1$, entre deux sous-espaces consécutifs V_i et V_{i+1} le saut de dimension est 2 s'ils sont tous deux de dimension impaire et 1 sinon.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire alternée ξ de rang maximal. On désigne par $\mathfrak{gl}(V)(\xi)$ l'annulateur de ξ dans $\mathfrak{gl}(V)$. Lorsque ξ est symplectique, $\mathfrak{gl}(V)(\xi)$ est noté $\mathfrak{sp}(V, \xi)$ ou simplement $\mathfrak{sp}(V)$ et c'est l'algèbre de Lie du groupe symplectique correspondant. On se donne un drapeau $\mathcal{V}$ de V générique relativement à ξ et on désigne par $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)(\xi)$ constituée des endomorphismes stabilisant $\mathcal{V}$ qui est aussi la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}}(\xi)$ de $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}}$ stabilisant ξ .

Proposition 4.6. (Voir[6, Proposition 5.3.1]) *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire alternée ξ de rang maximal et $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau générique relativement à ξ .*

- (a) *Supposons que $\dim V$ est pair, de sorte que ξ est symplectique. Alors,*
- (i) *on a $\text{ind}(\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}) = \sum_{i=1}^t [\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})]$,*
 - (ii) *la dimension du radical unipotent d'un stabilisateur générique de la représentation coadjointe de $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est $h(\mathcal{V})$,*
 - (iii) *l'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est quasi-réductive si et seulement si le drapeau $\mathcal{V}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.*
- (b) *Supposons que $\dim V$ est impair et désignons par $\mathcal{V}'$ le drapeau du sous-espace V_{t-1} obtenu en supprimant l'espace V du drapeau $\mathcal{V}$. Alors,*
- (iv) *on a*

$$\text{ind}(\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^t [\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})] - 1 & \text{si } \dim V_{t-1} < \dim V - 1, \\ \sum_{i=1}^t [\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})] + 1 & \text{si } \dim V_{t-1} = \dim V - 1, \end{cases}$$

- (v) *La dimension du radical unipotent d'un stabilisateur générique de la représentation coadjointe de $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est $h(\mathcal{V}')$.*
- (vi) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est quasi-réductive si et seulement si le drapeau $\mathcal{V}'$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.*

Remarque 4.7. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire alternée ξ de rang maximal et

$$\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$$

un drapeau générique relativement à ξ .

Supposons qu'il existe un sous-espace V_i du drapeau $\mathcal{V}$ tel que $\dim V_i$ soit pair. Alors ξ induit une forme symplectique sur le sous-espace $U = V_i$ de sorte que V est somme directe de U et de son orthogonal W relativement à ξ . On désigne par $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{W}$) le drapeau $\mathcal{U} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{i-1} \subsetneq V_i = U\}$ (resp. $\mathcal{W} = \{\{0\} = W_0 \subsetneq W_1 = V_{i+1} \cap W \subsetneq \cdots \subsetneq W_j = V_{i+j} \cap W \subsetneq \cdots \subsetneq W_{t-i} = W\}$). Comme $\mathcal{V}$ est générique relativement à ξ , il est clair que $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{W}$) est générique relativement à $\xi|_U$ (resp. $\xi|_W$). Par suite, la sous-algèbre $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ s'identifie au produit direct $\mathfrak{r}_{\mathcal{U}} \times \mathfrak{r}_{\mathcal{W}}$. En particulier, $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est quasi-réductive (resp. stable) si et seulement si $\mathfrak{r}_{\mathcal{U}}$ et $\mathfrak{r}_{\mathcal{W}}$ le sont. De plus, on a

$$\text{ind} \mathfrak{r}_{\mathcal{V}} = \text{ind} \mathfrak{r}_{\mathcal{U}} + \text{ind} \mathfrak{r}_{\mathcal{W}} \quad \text{et} \quad \text{rang} \mathfrak{r}_{\mathcal{V}} = \text{rang} \mathfrak{r}_{\mathcal{U}} + \text{rang} \mathfrak{r}_{\mathcal{W}}.$$

D'autre part, $\mathcal{V}$ vérifie la condition (*) si et seulement s'il en est de même de $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{W}$.

Proposition 4.8. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire alternée ξ de rang maximal et

$$\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$$

un drapeau de V générique relativement à ξ .

Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) $\mathbf{r}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul.
- (ii) $\mathcal{V}$ vérifie la condition $(*)$ et si $\dim V$ est impair, il en est de même de $\dim V_{t-1}$.

Preuve. D'après la remarque précédente, on se ramène à démontrer la proposition dans l'un des cas suivants:

- $\dim V$ est pair, $t \geq 2$ et pour $1 \leq i \leq t-1$, $\dim V_i$ est un nombre impair,
- $\dim V_i$ impair pour $1 \leq i \leq t$.

On pose $\dim V_i = 2p_i + 1$, $1 \leq i \leq t-1$ et $a_i = \dim V_i - \dim V_{i-1}$, $1 \leq i \leq t$. Alors $a_1 = 2p_1 + 1 = 2q_1 + 1$ est impair et $a_i = 2(p_i - p_{i-1}) = 2(q_i + 1)$, $2 \leq i \leq t-1$ est pair.

On se place dans le premier cas et on pose $\dim V_t = 2p_t$. Alors $a_t = 2(p_t - p_{t-1}) - 1 = 2q_t + 1$ est impair. D'après la proposition 4.6,

$$\text{rang} \mathbf{r}_{\mathcal{V}} = \sum_{i=1}^t q_i.$$

Ainsi, $\mathbf{r}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul si et seulement si $q_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq t$. D'où la proposition dans ce cas. On se place dans la deuxième cas. On pose $\dim V = 2p_t + 1$. Alors $a_t = 2(p_t - p_{t-1}) = 2(q_t + 1)$ est pair. D'après la proposition 4.6, on a

$$\text{rang} \mathbf{r}_{\mathcal{V}} = \sum_{i=1}^t q_i.$$

La proposition est alors claire dans ce cas. ■

Théorème 4.9. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire alternée ξ de rang maximal et

$$\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$$

un drapeau générique relativement à ξ .

Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) $\mathbf{r}_{\mathcal{V}}$ admet une forme linéaire stable.
- (ii) $\mathbf{r}_{\mathcal{V}}$ est quasi-réductive.

Preuve. Seule l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) mérite démonstration. D'après la remarque précédente, on se ramène au cas où aucun des éléments du drapeau $\mathcal{V}$, à l'exception de $\{0\}$ et V , est de dimension paire. On pose $d = \dim V$ et $\dim V_i = 2p_i + 1$, $1 \leq i \leq t$, $p_t = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. On choisit une base $e_1, \dots, e_d$ de V adaptée au drapeau $\mathcal{V}$ et telle que $\xi = \sum_{1 \leq i \leq p_t} e_{2i-1}^* \wedge e_{2i}^*$ et on pose $W_i = \mathbb{K}e_{2p_i-1+3} \oplus \mathbb{K}e_{2p_i-1+4} \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}e_{2p_i}$, $1 \leq i \leq t$ (on convient que $p_0 = -1$).

Alors les W_i , $1 \leq i \leq t$, sont des sous-espaces symplectiques deux à deux orthogonaux et il suit de [6, lemme 26 et paragraphes 5.4, 5.5] que les sous-algèbres de Cartan de $\prod_{1 \leq i \leq t} \mathfrak{sp}(W_i)$ sont des sous-algèbres de Cartan-Duflo de $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$.

Soit donc $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan de $\prod_{1 \leq i \leq t} \mathfrak{sp}(W_i)$. Le sous-espace V^0 de V constitué des vecteurs $\mathfrak{j}$ -invariants n'est autre que $(\oplus_{1 \leq i \leq t} W_i)^\perp$. On considère $\mathfrak{gl}(V^0)$ comme une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ en identifiant un élément $X \in \mathfrak{gl}(V^0)$ avec l'endomorphisme linéaire de V agissant comme X dans V^0 et trivialement dans son supplémentaire $\oplus_{1 \leq i \leq t} W_i$. Alors, on vérifie que le commutant de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{gl}(V)$ est $\mathfrak{j} \oplus \mathfrak{gl}(V^0)$. Il est alors clair que $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}^\dagger = \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{r}_{\mathcal{V}^0}$, où $\mathcal{V}^0$ est la trace du drapeau $\mathcal{V}$ sur le sous-espace V^0 .

D'autre part, remarquons que $\xi_0 = \xi|_{V^0}$ est de rang maximal et $\mathcal{V}^0$ est en position générique par rapport à ξ_0 (i.e $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}^0}$ est de même type que $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$). Compte tenu de la proposition 3.1 et comme $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}^0}$ est de rang nul, on se ramène à traiter le cas de rang nul pour $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$.

Il s'agit donc de montrer que si $\text{rang} \mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est nul et $\text{ind} \mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est strictement positif, alors $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ n'admet pas de forme stable.

Compte tenu de ce qui précède, il suffit d'étudier les deux cas suivants:

(a) $\dim V = 2p$, $p \geq 2$ et $\dim V_i = 2i - 1$ pour tout $1 \leq i \leq t - 1$ de sorte que $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_p \subsetneq V_{p+1} = V\}$. On choisit une base $(e_1, \dots, e_{2p})$ de V adaptée au drapeau $\mathcal{V}$ telle que $V_j = \mathbb{K}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}e_{2j-1}$, $1 \leq j \leq p$ et $\xi = \sum_{j=1}^p e_{2j-1}^* \wedge e_{2j}^*$. On note $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2p}$ la base de $\mathfrak{gl}(V)$ canoniquement associée à la base $(e_1, \dots, e_{2p})$ de V .

Dans ces conditions, il résulte de [6, 5.4] que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_{\mathcal{V}} = \mathfrak{l}_{\mathcal{V}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}, \quad (1)$$

où

$$\mathfrak{l}_{\mathcal{V}} = \bigoplus_{j=1}^p \mathbb{K}H_j, \quad (2)$$

avec

$$H_j = E_{2j-1, 2j-1} - E_{2j, 2j},$$

est un facteur réductif de $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$, commutatif dans ce cas, et

$$\mathfrak{n}_{\mathcal{V}} = \bigoplus_{j=1}^p \mathbb{K}Z_j \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{p-1} \mathbb{K}T_j \right), \quad (3)$$

avec

$$Z_j = 2E_{2j-1, 2j} \text{ et } T_j = E_{2j-1, 2j+2} + E_{2j+1, 2j},$$

est le radical unipotent de $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$, également commutatif dans ce cas.

On a alors:

$$\begin{aligned} [H_j, Z_l] &= 2\delta_{l,j}Z_j \\ [H_j, T_l] &= \delta_{l,j}T_j + \delta_{l,j-1}T_{j-1} = (\delta_{j,l} + \delta_{j,l+1})T_l. \end{aligned}$$

Soit $g \in \mathfrak{g}^*$. On pose $n = g|_{\mathfrak{n}_{\mathcal{V}}}$, $g(Z_j) = \zeta_j$ et $g(T_j) = \tau_j$.

Supposons que $\prod_{j=1}^p \zeta_j \neq 0$. Alors, on a

$$\mathfrak{g}(n) = \mathfrak{n}_{\mathcal{V}} \text{ et } \mathfrak{g}(g) = \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}(g).$$

Par suite et compte tenu du lemme 2.6, on a $\mathbf{N}_{\mathcal{V}}.g = g + \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}^{\perp}$, où $\mathbf{N}_{\mathcal{V}}$ désigne le radical unipotent du sous-groupe algébrique connexe $\mathbf{R}_{\mathcal{V}}$ de $\mathbf{GL}(V)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$. Ainsi, on peut supposer que $g|_{\mathfrak{l}_{\mathcal{V}}} = 0$.

Soit

$$X = \sum_{i=1}^p z_i Z_i + \sum_{i=1}^{p-1} t_i T_i \in \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}.$$

On a

$$\begin{aligned} [H_1, X] &= 2z_1 Z_1 + t_1 T_1, \\ [H_i, X] &= 2z_i Z_i + t_i T_i + t_{i-1} T_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq p-1, \\ [H_p, X] &= 2z_p Z_p + t_{p-1} T_{p-1}. \end{aligned}$$

Alors, on a $X \in \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}(g)$ si et seulement si:

$$\begin{cases} 2\zeta_1 z_1 + \tau_1 t_1 = 0 \\ 2\zeta_i z_i + \tau_i t_i + \tau_{i-1} t_{i-1} = 0, \quad 2 \leq i \leq p-1 \\ 2\zeta_p z_p + \tau_{p-1} t_{p-1} = 0. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\mathfrak{g}(g) = \bigoplus_{i=1}^{p-1} \mathbb{K}W_i,$$

avec

$$W_i = T_i - \frac{\tau_i}{2} \left(\frac{1}{\zeta_i} Z_i + \frac{1}{\zeta_{i+1}} Z_{i+1} \right) = E_{2i-1, 2i+2} + E_{2i+1, 2i} - \frac{\tau_i}{2} \left(\frac{1}{\zeta_i} E_{2i-1, 2i} + \frac{1}{\zeta_{i+1}} E_{2i+1, 2i+2} \right).$$

Soit $H = \sum_{i=1}^p H_i$. Alors, on a

$$[H, Z_l] = 2Z_l \quad \text{et} \quad [H, T_l] = 2T_l$$

et donc

$$[H, W_l] = 2W_l, \quad 1 \leq l \leq p-1.$$

Il en résulte que

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] \cap \mathfrak{g}(g) \neq \{0\}.$$

Compte tenu du lemme 2.10 et du fait que g est générique, il résulte que $\mathfrak{g}$ n'admet pas de forme linéaire stable.

(b) $\dim V = 2p + 1$, $p \geq 2$ et $\dim V_i = 2i - 1$ pour tout $1 \leq i \leq t - 1$ de sorte que $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_p \subsetneq V_{p+1} = V\}$. On choisit une base $(e_1, \dots, e_{2p+1})$ de V adaptée au drapeau $\mathcal{V}$ telle que $V_j = \mathbb{K}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}e_{2j-1}$, $1 \leq j \leq p+1$ et $\xi = \sum_{j=1}^p e_{2j-1}^* \wedge e_{2j}^*$.

Dans ces conditions et compte tenu de [6, 5.6], les matrices des éléments de $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ dans la base $e_1, \dots, e_{2p+1}$ sont de la forme:

Si $H = \sum_{i=1}^{p+1} H_i$, on a

$$[H, W_i] = 2W_i \text{ pour } 1 \leq i \leq p-1.$$

Par suite, on a

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] \cap \mathfrak{g}(g) \neq \{0\}.$$

Comme g est générique, ceci achève la démonstration dans ce cas. ■

5. Réduction au cas de rang nul pour les sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie orthogonale

Le but de ce numéro est de ramener l'étude de la stabilité au cas de rang nul pour les sous-algèbres paraboliques et qui nous sera utile pour la suite:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B . On désigne par $\mathfrak{so}(E)$ l'algèbre de Lie du groupe orthogonal correspondant. Soit $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de sous-espaces isotropes de E avec $\dim V \geq 1$. On désigne par $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{so}(E)$ constituée des endomorphismes de E stabilisant le drapeau $\mathcal{V}$: c'est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{so}(E)$ et les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(E)$ sont toutes obtenues ainsi.

Soit maintenant $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$. Supposons que $\mathfrak{g}$ ne soit pas quasi-réductive et donc que $\text{rang } \mathfrak{g} < \text{ind } \mathfrak{g}$. On cherche à savoir si $\mathfrak{g}$ admet ou non des formes stables.

Soit $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$ et Π l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{j}$ dans E . Si $\alpha \in \Pi \cup \{0\}$, on note E^α le sous-espace poids correspondant. Si $\alpha \in \Pi$, $-\alpha \in \Pi$, de plus E^α et $E^{-\alpha}$ sont des sous-espaces totalement isotropes mis en dualité par B . Si $\alpha, \beta \in \Pi$ sont tels que $\alpha + \beta \neq 0$, alors E^α et E^β sont orthogonaux.

Soit $\Pi^+ \subset \Pi$ une partie telle que $\Pi = \Pi^+ \amalg \Pi^-$ où $\Pi^- = -\Pi^+$.

Alors, on a

$$\mathfrak{so}(E)^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{so}(E^0) \times \prod_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{gl}(E^\alpha).$$

Pour $\alpha \in \Pi \cup \{0\}$, soit $\mathcal{V}^\alpha$ le drapeau de E^α dont les éléments sont ceux de $U \cap E^\alpha$, $U \in \mathcal{V}$ rangés dans l'ordre strictement croissant, auxquels on adjoint E^α si $\alpha \neq 0$. Alors, on a

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{p}_{\mathcal{V}^0} \times \prod_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{q}_{\mathcal{V}^\alpha}$$

où avec les notations du numéro précédent $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}^\alpha}$ désigne la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}(E^\alpha)$ qui stabilise le drapeau $\mathcal{V}^\alpha$. D'autre part, d'après Panyushev (voir [12]) les sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}^\alpha}$ sont stables. Il s'ensuit que $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ admet des formes stables si et seulement si $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}^0}$ admet des formes stables. Or d'après 3.2 et comme son centre est trivial, $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}^0}$ est de rang nul. Ainsi et compte tenu de la proposition 3.1, pour démontrer l'équivalence entre la quasi-réductivité et la stabilité dans le cas considéré, on se ramène à montrer que les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(E)$ qui sont de rang nul et d'indice strictement positif ne sont pas stables.

6. Stabilité des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(E)$

Dans ce numéro, on va étudier la stabilité des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie orthogonales. Exactement, on va montrer l'assertion (ii) de la conjecture de Panyushev [12, conjecture 5.6] pour le cas des sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie orthogonale.

Théorème 6.1. (Voir [6, 5.15]) Soit E un espace vectoriel de dimension $q \geq 3$ sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B , $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de sous-espaces isotropes de E avec $r = \dim V \geq 1$. On note $\mathcal{V}'$ le drapeau tel que $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \setminus \{V\}$, si r est impair égal à $\frac{q}{2}$, et $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$, sinon.

(i) On a les formules suivantes pour l'indice de la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$:

$$\text{ind}(\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - r + \sum_{i=1}^t \left\lfloor \frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1}) \right\rfloor & \text{si } r \text{ est pair,} \\ \left\lfloor \frac{q-1}{2} \right\rfloor - r + \sum_{i=1}^t \left\lfloor \frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1}) \right\rfloor & \text{si } r \text{ est impair, et } r < \frac{q}{2}, \\ \sum_{i=1}^t \left\lfloor \frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1}) \right\rfloor - 1 & \text{si } r \text{ est impair, } r = \frac{q}{2} \text{ et } \dim V_{t-1} < r - 1, \\ \sum_{i=1}^t \left\lfloor \frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1}) \right\rfloor + 1 & \text{si } r \text{ est impair, } r = \frac{q}{2} \text{ et } \dim V_{t-1} = r - 1. \end{cases}$$

(ii) La dimension du radical unipotent d'un stabilisateur générique de la représentation coadjointe de $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est $h(\mathcal{V}')$.

(iii) L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est quasi-réductive si et seulement si le drapeau $\mathcal{V}'$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Proposition 6.2. Soit $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de sous-espaces isotropes de E et $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre parabolique qui stabilise le drapeau $\mathcal{V}$. On pose $q = \dim E$ et $r = \dim V$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul.

(ii) La condition $(*)$ est satisfaite par $\mathcal{V}$ et (q, r) vérifie l'une des conditions suivantes:

$$\begin{aligned} (a) \quad & q \in \{2r, 2r + 1\}. \\ (b) \quad & r \text{ est impair et } q = 2r + 2. \end{aligned} \tag{6}$$

Preuve. : Remarquons tout d'abord que l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul si et seulement si le nombre $h(\mathcal{V}')$ est égal à l'indice de $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$. D'après le théorème 6.1, il suffit de considérer les cas suivants:

On suppose que $\dim V = r$ est pair de sorte que $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$. Dans ce cas, on a

$$\text{ind}(\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}) = \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - r + \sum_{i=1}^t \left\lfloor \frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1}) \right\rfloor.$$

Par suite, on a

$$\text{rang } \mathbf{p}_{\mathcal{V}} = 0 \text{ si et seulement si } \left[\frac{q}{2} \right] - r = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2} (\dim V_i - \dim V_{i-1}) \right] = h(\mathcal{V}).$$

Ainsi, $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul si et seulement si $q \in \{2r, 2r+1\}$ et le drapeau $\mathcal{V}$ vérifie la condition $(*)$.

On suppose que $\dim V = r$ est impair et $r < \frac{q}{2}$ de sorte que $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$. Dans ce cas, on a

$$\text{ind}(\mathbf{p}_{\mathcal{V}}) = \left[\frac{q-1}{2} \right] - r + \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2} (\dim V_i - \dim V_{i-1}) \right].$$

Par suite, on a

$$\text{rang } \mathbf{p}_{\mathcal{V}} = 0 \text{ si et seulement si } \left[\frac{q-1}{2} \right] - r = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2} (\dim V_i - \dim V_{i-1}) \right] = h(\mathcal{V}).$$

Ainsi, $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul si et seulement si $q \in \{2r+1, 2r+2\}$ et le drapeau $\mathcal{V}$ vérifie la condition $(*)$.

On suppose maintenant que $\dim V = r$ est impair, $r = \frac{q}{2}$. Dans ces conditions et compte tenu du théorème 6.1, on a

$$\text{ind}(\mathbf{p}_{\mathcal{V}}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2} (\dim V_i - \dim V_{i-1}) \right] - 1 & \text{si } \dim V_{t-1} < r-1, \\ \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2} (\dim V_i - \dim V_{i-1}) \right] + 1 & \text{si } \dim V_{t-1} = r-1. \end{cases}$$

La proposition est alors claire dans ce cas. ■

On garde les notations de 5. Si $u, v \in E$, on définit l'élément $u \wedge_B v$ de $\mathfrak{so}(E)$ en posant, pour $x \in E$:

$$u \wedge_B v(x) = B(x, u)v - B(x, v)u.$$

Il existe une unique application linéaire $\wedge_B : E \otimes E \mapsto \mathfrak{so}(E)$ telle que $\wedge_B(u \otimes v) = u \wedge_B v$, laquelle passe au quotient en un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\wedge^2 E$ sur $\mathfrak{so}(E)$. Plus généralement, si V, W sont des sous-espaces de E tels que $V \cap W = \{0\}$, $\wedge_B$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\wedge^2 V$ (resp. $V \otimes W$) sur un sous-espace de $\mathfrak{so}(E)$ noté $\Lambda_B^2 V$ (resp. $V \wedge_B W$).

Si $u_1, u_2, v_1, v_2 \in E$, on a

$$\begin{aligned} [u_1 \wedge_B v_1, u_2 \wedge_B v_2] = & B(u_1, u_2)v_1 \wedge_B v_2 + B(u_1, v_2)u_2 \wedge_B v_1 \\ & + B(v_1, u_2)u_1 \wedge_B v_2 + B(v_1, v_2)u_1 \wedge_B u_2. \end{aligned} \quad (7)$$

On munit $\mathfrak{so}(E)$ de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée et invariante $L(X, Y) = -\frac{1}{2} \text{Tr} XY$. Si $u_1, u_2, v_1, v_2 \in E$, on a

$$L(u_1 \wedge_B v_1, u_2 \wedge_B v_2) = \det \begin{pmatrix} B(u_1, u_2) & B(u_1, v_2) \\ B(v_1, u_2) & B(v_1, v_2) \end{pmatrix}.$$

Soit V un sous-espace isotrope non nul de E et W un supplémentaire dans E de l'orthogonal $V^{\perp_B}$ de V pour B . Alors B induit une dualité entre V et W , la restriction de B à $F = (V \oplus W)^{\perp_B}$ est non dégénérée et on a $E = V \oplus F \oplus W$ de sorte que $V^{\perp_B} = V \oplus F$. On identifie les algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ et $\mathfrak{so}(F)$ à des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{so}(E)$ de la manière suivante:

- si $X \in \mathfrak{gl}(V)$, on l'étend en un élément encore noté X de $\mathfrak{so}(E)$ en décidant que $X|_F = 0$ et, si $y \in W$, $X.y$ est l'élément de W tel que

$$B(X.x, y) + B(x, X.y) = 0, x \in V,$$

- si $X \in \mathfrak{so}(F)$, on l'étend en un élément encore noté X de $\mathfrak{so}(E)$ en décidant que $X|_{F^{\perp_B}} = 0$.

De plus, si $X \in \mathfrak{gl}(V)$, $Y \in \mathfrak{so}(F)$, $u \in F$, $v, v' \in V$, on a

$$\begin{aligned} [X, u \wedge_B v] &= u \wedge_B X.v, \\ [Y, u \wedge_B v] &= Y.u \wedge_B v, \\ [Y, v \wedge_B v'] &= 0, \\ [X, v \wedge_B v'] &= X.v \wedge_B v' + v \wedge_B X.v'. \end{aligned} \tag{8}$$

- La forme L permet d'identifier $\wedge_2^B V^*$ (rep. $(F \wedge_B V)^*$) avec $\wedge_2^B W$ (resp. $F \wedge_B V$).

Le théorème suivant est le résultat principal de ce travail.

Théorème 6.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $q \geq 3$ sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire symétrique B non dégénérée et $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de sous-espaces isotropes de E avec $\dim V \geq 1$. On note $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{so}(E)$ qui stabilise le drapeau $\mathcal{V}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ admet une forme linéaire stable.
- (ii) $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est quasi-réductive.

Preuve. On pose $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ et $\dim V = r$. D'après 5, on peut supposer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul c'est à dire que $\mathcal{V}$ vérifie la condition $(*)$ et (q, r) vérifie (6). Il s'agit de montrer que si l'indice de $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est strictement positif, alors $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ n'admet pas de formes stables.

On garde les notations précédentes et on commence par étudier un cas particulier: on suppose que $t \geq 2$ et pour $1 \leq i \leq t-1$, $\dim V_i$ est impair avec $\dim V_i = 2i-1$, de sorte que $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_p \subsetneq V_{p+1} = V\}$, avec $t = p+1$ et $r \in \{2p, 2p+1\}$.

D'après [6, 5.15], on a

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} \mathfrak{q}_{\mathcal{V}} \oplus \mathfrak{n}_V & \text{si } r = \dim V \text{ est pair ou } F = 0, \\ \mathfrak{q}_{\mathcal{V}} \times \mathfrak{so}(F) \oplus \mathfrak{n}_V & \text{si } r = \dim V \text{ est impair et } F \neq 0. \end{cases}$$

avec $\mathfrak{n}_V = F \wedge_B V \oplus \mathfrak{z}_V$, $\mathfrak{z}_V = \Lambda^2 V$ (le centre de $\mathfrak{n}_V$), où $\mathfrak{n}_V$ est un idéal unipotent de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}(V)$ qui stabilise le drapeau $\mathcal{V}$.

Soit g une forme linéaire générique sur $\mathfrak{g}$ et n (resp. ξ) sa restriction à $\mathfrak{n}_V$ (resp. $\mathfrak{z}_V$). Par généricité de g , on peut supposer que ξ est une forme bilinéaire

alternée sur V générique relativement au drapeau $\mathcal{V}$. On choisit une base $e_1, \dots, e_r$ de V adaptée au drapeau $\mathcal{V}$ telle que, notant $e_1^*, \dots, e_r^*$ la base duale, on ait $\xi = \sum_{1 \leq 2i \leq r} e_{2i-1}^* \wedge e_{2i}^*$. On identifie F et F^* au moyen de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée induite par la restriction à F de celle de B . Compte tenu des numéros 5.16, 5.18 et 5.19 de [6], on peut supposer que $n|_{F \wedge_B V} = 0$ si r est pair ou $F = 0$ et $n = \xi + u^* \wedge e_r^*$, avec $u \in F$ non isotrope, si r est impair et $F \neq 0$. On note $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq r}$ la base de $\mathfrak{gl}(V)$ telle que $E_{ij}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$, $1 \leq k \leq r$. Soit $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}}$ qui stabilise la forme bilinéaire ξ sur V . Compte tenu des formules (2), (3) et (5) de la démonstration du théorème 4.9 dont on reprend les notations, on a

$$\mathfrak{r}_{\mathcal{V}} = \mathfrak{l}_{\mathcal{V}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}. \quad (9)$$

avec

$$\mathfrak{l}_{\mathcal{V}} = \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{K}H_j \text{ et } \mathfrak{n}_{\mathcal{V}} = \left(\bigoplus_{j=1}^p \mathbb{K}Z_j \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{s-1} \mathbb{K}T_j \right),$$

où $s = p$ si $r = 2p$ et $s = p + 1$ si $r = 2p + 1$.

Alors

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{V}} = \left(\bigoplus_{i=1}^p \mathbb{K}S_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s-1} \mathbb{K}E_{2i, 2i+1} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j>i+1} \mathbb{K}E_{i,j} \right), \quad (10)$$

où

$$S_i = E_{2i-1, 2i-1} + E_{2i, 2i},$$

est un supplémentaire de $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ dans $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}}$.

D'une part et compte tenu des numéros 5.16 et 5.18 de [6], si $r = 2p$ ou $F = 0$, on a

$$\mathfrak{h} := \mathfrak{g}(n) = \mathfrak{r}_{\mathcal{V}} \oplus \mathfrak{z}_V.$$

D'autre part et compte tenu du numéro 5.19 de [6], si $r = 2p + 1$ et $F \neq 0$, on a

$$\mathfrak{h} := \mathfrak{g}(n) = \mathfrak{r}_{\mathcal{V}'} \oplus \mathfrak{t}_{V'} \oplus \mathfrak{n}_V(n),$$

où $V' = \mathbb{K}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}e_{2p}$, $\mathcal{V}' = \{\{0\} = V'_0 \subsetneq V'_1 = V_1 \subsetneq V'_2 = V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V'_p = V_p \subsetneq V'_{p+1} = V'\}$ le drapeau obtenu en remplaçant l'espace V par V' ($\xi|_{V'}$ est symplectique et $\mathcal{V}'$ est en position générique par rapport à $\xi|_{V'}$), $\mathfrak{t}_{V'} = \mathbb{K}(T_p - u \wedge_B e_{2p-1})$ et $\mathfrak{n}_V(n) = F \wedge_B e_{2p+1} \oplus \mathfrak{z}_V$. De plus, on a $\mathfrak{h} + \mathfrak{n}_V = \mathfrak{r}_{\mathcal{V}'} \oplus \mathbb{K}T_p \oplus \mathfrak{n}_V$.

Quitte alors à translater g par un élément de $\exp \mathfrak{n}_V$, on peut supposer que, compte tenu du lemme 2.6, $g|_{\mathfrak{m}_{\mathcal{V}}} = 0$ dans les deux cas traités.

On pose $\zeta_i = g(Z_i)$, $1 \leq i \leq p$, $\tau_i = g(T_i)$, $1 \leq i \leq s - 1$. Par généricité de g , on peut supposer que $\prod_{i=1}^p \zeta_i \neq 0$ si r est pair et $\tau_p \prod_{i=1}^p \zeta_i \neq 0$ si r est impair. Soit $\lambda = g|_{\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}}$. Dans ces conditions et compte tenu de la démonstration du théorème 4.9, on peut également supposer que $g|_{\mathfrak{l}_{\mathcal{V}}} = \lambda|_{\mathfrak{l}_{\mathcal{V}}} = 0$. De plus et comme λ est générique, il suit des calculs de la démonstration du théorème 4.9 que

$$\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}(\lambda) = \bigoplus_{k=1}^{p-1} \mathbb{K}W_k,$$

avec

$$W_k = E_{2k-1,2k+2} + E_{2k+1,2k} - \frac{\tau_k}{2} \left(\frac{1}{\zeta_k} E_{2k-1,2k} + \frac{1}{\zeta_{k+1}} E_{2k+1,2k+2} \right), \quad 1 \leq k \leq p-1.$$

Avec ces hypothèses sur la forme linéaire g et ces notations, nous allons démontrer les deux lemmes qui suivent.

Lemme 6.4. *On suppose que $r = 2p$ ou $F = 0$. Alors, on a*

$$(i) \quad \mathfrak{g}(g) = \bigoplus_{k=1}^{p-1} \mathbb{K}C_k, \text{ avec}$$

$$C_k = W_k + \frac{1}{2}\tau_k(e_{2k-1} \wedge e_{2k} - e_{2k+1} \wedge e_{2k+2}) + \frac{1}{2}\zeta_{k+1}e_{2k-1} \wedge e_{2k+2} + \frac{1}{2}\zeta_k e_{2k} \wedge e_{2k+1}.$$

$$(ii) \quad [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] \cap \mathfrak{g}(g) \neq \{0\}.$$

Preuve. Rappelons que l'on a $g|_{\mathfrak{m}_{\mathcal{V}}} = g|_{\mathfrak{l}_{\mathcal{V}}} = 0$.

Considérons, pour $1 \leq k \leq p-1$, les vecteurs C_k avec

$$C_k = W_k + \frac{1}{2}\tau_k(e_{2k-1} \wedge e_{2k} - e_{2k+1} \wedge e_{2k+2}) + \frac{1}{2}\zeta_{k+1}e_{2k-1} \wedge e_{2k+2} + \frac{1}{2}\zeta_k e_{2k} \wedge e_{2k+1}.$$

Remarquons tout d'abord que $C_k \in \mathfrak{h}(h) = \mathfrak{r}_{\mathcal{V}}(\lambda) \oplus \mathfrak{z}_V$ avec $h = g|_{\mathfrak{h}}$, de sorte que

$$C_k \in \mathfrak{g}(g) \text{ si et seulement si } \langle g, [C_k, Y] \rangle = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{m}_{\mathcal{V}}.$$

Compte tenu de (10), on a

$$C_k \in \mathfrak{g}(g) \text{ si et seulement si } \begin{cases} \langle g, [S_j, C_k] \rangle = 0, & 1 \leq j \leq p, \\ \langle g, [E_{2j,2j+1}, C_k] \rangle = 0, & 1 \leq j \leq s-1, \\ \langle g, [E_{i,j}, C_k] \rangle = 0, & 2 \leq i+1 < j \leq r. \end{cases}$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} [S_j, C_k] &= \delta_{k,j}(E_{2k-1,2k+2} - E_{2k+1,2k} + \tau_k e_{2k-1} \wedge e_{2k} + \frac{1}{2}\zeta_{k+1} e_{2k-1} \wedge e_{2k+2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\zeta_k e_{2k} \wedge e_{2k+1}) + \delta_{k+1,j}(-E_{2k-1,2k+2} + E_{2k+1,2k} - \tau_k e_{2k+1} \wedge e_{2k+2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\zeta_{k+1} e_{2k-1} \wedge e_{2k+2} + \frac{1}{2}\zeta_k e_{2k} \wedge e_{2k+1}) \\ &= \delta_{k,j}(-T_k + \tau_k e_{2k-1} \wedge e_{2k}) + \delta_{k+1,j}(T_k - \tau_k e_{2k+1} \wedge e_{2k+2}) \bmod(\mathfrak{m}_{\mathcal{V}} + \ker(n)), \end{aligned}$$

de sorte que, compte tenu de nos hypothèses sur la forme linéaire g ,

$$\langle g, [S_j, C_k] \rangle = 0, \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq p.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 [E_{2j,2j+1}, C_k] &= \delta_{k-1,j} (E_{2k-2,2k+2} - \frac{\tau_k}{2\zeta_k} E_{2k-2,2k} + \frac{1}{2} \tau_k e_{2k-2} \wedge e_{2k} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \zeta_{k+1} e_{2k-2} \wedge e_{2k+2}) + \delta_{k,j} (-E_{2k+1,2k+1} + E_{2k,2k} \\
 &\quad + \frac{\tau_k}{2\zeta_k} E_{2k-1,2k+1} - \frac{\tau_k}{2\zeta_{k+1}} E_{2k,2k+2} - \frac{1}{2} \tau_k e_{2k} \wedge e_{2k+2}) \\
 &\quad + \delta_{k+1,j} (-E_{2k-2,2k+3} + \frac{\tau_k}{2\zeta_{k+1}} E_{2k+1,2k+3}) \\
 &= \delta_{k,j} (H_k - H_{k+1}) \bmod(\mathfrak{m}_{\mathcal{V}} + \ker(n)).
 \end{aligned}$$

Comme on a $g(H_{k+1}) = g(H_k) = 0$, il suit de nos hypothèses sur la forme linéaire g , que

$$\langle g, [E_{2j,2j+1}, C_k] \rangle = 0, \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq s-1.$$

Enfin, pour calculer le crochet $[E_{i,j}, C_k]$ avec $2 \leq i+1 < j \leq r$, on distingue suivant la parité de i et j :

(i) Pour $i = 2l$ et $j = 2l'$ avec $l+1 \leq l'$, on a

$$\begin{aligned}
 [E_{2l,2l'}, C_k] &= \delta_{k+1,l} (-E_{2k-1,2l'} + \frac{\tau_k}{2\zeta_{k+1}} E_{2k+1,2l'}) + \delta_{k,l} (-E_{2k+1,2l'} + \frac{\tau_k}{2\zeta_k} E_{2k-1,2l'}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \delta_{k,l'} (\tau_k e_{2k-1} \wedge e_{2l} + \zeta_k e_{2l} \wedge e_{2k+1}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \delta_{k+1,l'} (-\tau_k e_{2k+1} \wedge e_{2l} + \zeta_{k+1} e_{2k-1} \wedge e_{2l}) \\
 &= \delta_{k,l} \delta_{k+1,l'} (-\frac{1}{2} Z_{k+1} + \frac{1}{2} \zeta_{k+1} e_{2k-1} \wedge e_{2k}) \bmod(\mathfrak{m}_{\mathcal{V}} + \ker(n)),
 \end{aligned}$$

de sorte que

$$\langle g, [E_{2l,2l'}, C_k] \rangle = 0, \quad \text{pour tout } 1 \leq l < l'.$$

(ii) Pour $i = 2l$ et $j = 2l' + 1$ avec $1 \leq l < l'$, on a

$$\begin{aligned}
 [E_{2l,2l'+1}, C_k] &= \delta_{k+1,l} (-E_{2k-1,2l'+1} + \frac{\tau_k}{2\zeta_{k+1}} E_{2k+1,2l'+1}) \\
 &\quad + \delta_{k,l} (-E_{2k+1,2l'+1} + \frac{\tau_k}{2\zeta_k} E_{2k-1,2l'+1}) \\
 &\quad + \delta_{k-1,l'} (E_{2l,2k+2} - \frac{\tau_k}{2\zeta_k} E_{2l,2k} + \frac{1}{2} \tau_k e_{2l} \wedge e_{2k} + \frac{1}{2} \zeta_{k+1} e_{2l} \wedge e_{2k+2}) \\
 &\quad + \delta_{k,l'} (E_{2l,2k} - \frac{\tau_k}{2\zeta_{k+1}} E_{2l,2k+2} - \frac{1}{2} \tau_k e_{2l} \wedge e_{2k+2} + \frac{1}{2} \zeta_k e_{2k} \wedge e_{2l}).
 \end{aligned}$$

Remarquons que, pour $1 \leq l < l'$, $[E_{2l,2l'+1}, C_k] \in \ker(n) + \mathfrak{m}_{\mathcal{V}}$ de sorte que

$$\langle g, [E_{2l,2l'+1}, C_k] \rangle = 0.$$

(iii) Pour $i = 2l + 1$ et $j = 2l'$ avec $1 \leq l + 1 < l'$, on a

$$\begin{aligned} [E_{2l+1,2l'}, C_k] &= \frac{1}{2} \delta_{k,l'} (\tau_k e_{2k-1} \wedge e_{2l+1} + \zeta_k e_{2l+1} \wedge e_{2k+1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta_{k+1,l'} (-\tau_k e_{2k+1} \wedge e_{2l+1} + \zeta_{k+1} e_{2k-1} \wedge e_{2l+1}). \end{aligned}$$

On voit donc que, pour $1 \leq l + 1 < l'$, $[E_{2l,2l'+1}, C_k] \in \ker(n)$. Par suite

$$\langle g, [E_{2l,2l'+1}, C_k] \rangle = 0.$$

(iv) Pour $i = 2l + 1$ et $j = 2l' + 1$ avec $0 \leq l < l'$, on a

$$\begin{aligned} [E_{2l+1,2l'+1}, C_k] &= \delta_{k-1,l'} (E_{2l+1,2k+2} - \frac{\tau_k}{2\zeta_k} E_{2l+1,2k} + \frac{1}{2} \tau_k e_{2l+1} \wedge e_{2k} \\ &\quad + \frac{1}{2} \zeta_{k+1} e_{2l+1} \wedge e_{2k+2}) + \delta_{k,l'} (E_{2l+1,2k} - \frac{\tau_k}{2\zeta_{k+1}} E_{2l+1,2k+2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \tau_k e_{2l+1} \wedge e_{2k+2} - \frac{1}{2} \zeta_k e_{2l+1} \wedge e_{2k}) \\ &= \delta_{k-1,l} \delta_{k,l'} (\frac{1}{2} Z_k - \frac{1}{2} \zeta_k e_{2k-1} \wedge e_{2k}) \bmod(\mathfrak{m}_{\mathcal{V}} + \ker(n)), \end{aligned}$$

de sorte que, compte tenu de nos hypothèses sur la forme linéaire g ,

$$\langle g, [E_{2l+1,2l'+1}, C_k] \rangle = 0 \text{ pour tout } 0 \leq l < l'.$$

Par suite, pour $1 \leq k \leq p - 1$, on a

$$\langle g, [C_k, Y] \rangle = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

On a donc

$$C_k \in \mathfrak{g}(g) \text{ pour tout } 1 \leq k \leq p - 1.$$

D'autre part, remarquons que la famille $\{C_k, 1 \leq k \leq p - 1\}$ est une famille libre de $\mathfrak{g}(g)$. De plus, comme $\dim(\mathfrak{g}(g)) = h(\mathcal{V}) = p - 1$, cette famille est maximale et donc elle forme une base de $\mathfrak{g}(g)$. On a donc

$$\mathfrak{g}(g) = \bigoplus_{k=1}^{p-1} \mathbb{K} C_k.$$

On pose $R_k = E_{2k-1,2k-1} + E_{2k+1,2k+1}$. On a $R_k \in \mathfrak{g}$ et

$$[R_k, C_k] = C_k \text{ pour } 1 \leq k \leq p - 1,$$

ceci montre alors que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] \cap \mathfrak{g}(g) \neq \{0\}$ de sorte que, compte tenu du lemme 2.10 et du fait que la forme linéaire g est générique, $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est non stable. ■

Lemme 6.5. *On suppose que $\dim V = 2p + 1$ et $F \neq \{0\}$. Ici $\dim F \in \{1, 2\}$, $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_p \subsetneq V_{p+1} = V\}$ et $n = \xi + u^* \wedge e_{2p+1}^*$, avec*

$u \in F$ non isotrope. On rappelle les vecteurs C_k du lemme 6.4. Alors, on a

$$(i) \quad \mathfrak{g}(g) = \bigoplus_{k=1}^{p-1} \mathbb{K}C_k \oplus \mathbb{K}D_p, \text{ avec}$$

$$D_p = T_p - u \wedge_B e_{2p-1} - \tau_p u \wedge_B e_{2p+1} - \frac{\tau_p}{2\zeta_p} Z_p + \frac{1}{2} \tau_p e_{2p-1} \wedge e_{2p} + \frac{1}{2} \zeta_p e_{2p} \wedge e_{2p+1}.$$

$$(ii) \quad [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] \cap \mathfrak{g}(g) \neq \{0\}.$$

Preuve. Rappelons dans ce cas que l'on a $g|_{\mathfrak{m}_V} = g|_{\mathfrak{so}(F)} = g|_{\mathfrak{l}_V} = 0$.

Remarquons tout d'abord que dans ce cas les vecteurs C_k appartiennent à $\mathfrak{h}$. De plus, on a

$$\langle g, [C_k, Y] \rangle = 0, \forall Y \in \mathfrak{r}_V \text{ et } [C_k, \mathfrak{so}(F)] = 0.$$

D'autre part et compte tenu des calculs du cas précédent, on a

$$\langle g, [C_k, Y] \rangle = 0, \forall Y \in \mathfrak{m}_V,$$

de sorte que $\langle g, [C_k, Y] \rangle = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. On a donc $C_k \in \mathfrak{g}(g)$.

Considérons le vecteur D_p avec

$$D_p = T_p - u \wedge_B e_{2p-1} - \tau_p u \wedge_B e_{2p+1} - \frac{\tau_p}{2\zeta_p} Z_p + \frac{1}{2} \tau_p e_{2p-1} \wedge e_{2p} + \frac{1}{2} \zeta_p e_{2p} \wedge e_{2p+1}.$$

Remarquons tout d'abord que $D_p \in \mathfrak{h}$ de sorte que

$$D_p \in \mathfrak{g}(g) \text{ si et seulement si } \begin{cases} \langle g, [D_p, Y] \rangle = 0, & \forall Y \in \mathfrak{r}_V, \\ \langle g, [D_p, Y] \rangle = 0, & \forall Y \in \mathfrak{so}(F), \\ \langle g, [D_p, Y] \rangle = 0, & \forall Y \in \mathfrak{m}_V. \end{cases}$$

Compte tenu de (9), on a

$$\langle g, [D_p, \mathfrak{r}_V] \rangle = 0 \text{ si et seulement si } \begin{cases} \langle g, [Z_j, D_p] \rangle = 0, & 1 \leq j \leq p+1, \\ \langle g, [T_j, D_p] \rangle = 0, & 1 \leq j \leq p, \\ \langle g, [H_j, D_p] \rangle = 0, & 1 \leq j \leq p. \end{cases}$$

On a, pour $1 \leq j \leq p+1$,

$$[H_j, D_p] = \begin{cases} T_p - \tau_p u \wedge_B e_{2p+1} \bmod(\ker(n)) & \text{si } j = p+1, \\ T_p - \frac{\tau_p}{\zeta_p} Z_p \bmod(\ker(n)) & \text{si } j = p, \\ 0 & \text{si } j \leq p-2. \end{cases}$$

De plus, pour $1 \leq j \leq p$, on vérifie aisément que

$$[D_p, Z_j] = \begin{cases} 0 \bmod(\ker(n)) & \text{si } j = p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$[D_p, T_j] = \begin{cases} 0 \bmod(\ker(n)) & \text{si } j = p \text{ ou } j = p-1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que, compte tenu de nos hypothèses sur la forme linéaire g ,

$$\langle g, [D_p, Y] \rangle = 0, \text{ pour tout } Y \in \mathfrak{r}_{\mathcal{V}}.$$

De plus, il est clair que, pour tout $Y \in \mathfrak{so}(F)$, on a $[Y, D_p] \in \ker(n)$ de sorte que $\langle g, [D_p, \mathfrak{so}(F)] \rangle = \{0\}$.

Par suite et compte tenu de (10), on a $D_p \in \mathfrak{g}(g)$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} \langle g, [S_j, D_p] \rangle = 0, & \text{pour } 1 \leq j \leq p, \\ \langle g, [E_{2j, 2j+1}, D_p] \rangle = 0, & \text{pour } 1 \leq j \leq p, \\ \langle g, [E_{i, j}, D_p] \rangle = 0, & \text{pour } 2 \leq i+1 < j \leq 2p+1. \end{cases}$$

D'une part, on a

$$[S_j, D_p] = \begin{cases} -T_p + \tau_p e_{2p-1} \wedge_B e_{2p} \bmod(\ker(n)) & \text{si } j = p, \\ 0 & \text{si } j \leq p-1, \end{cases}$$

de sorte que, pour $1 \leq k \leq p$,

$$\langle g, [S_j, D_p] \rangle = 0.$$

D'autre part, on a

$$[E_{2j, 2j+1}, D_p] = \begin{cases} E_{2p, 2p} - E_{2p+1, 2p+1} + \frac{\tau_p}{2\zeta_p} E_{2p-1, 2p+1} \bmod(\ker(n)) & \text{si } j = p, \\ -\frac{\tau_p}{2\zeta_p} E_{2p-2, 2p} \bmod(\ker(n)) & \text{si } j = p-1, \\ 0 & \text{si } j \leq p-2. \end{cases}$$

Comme $E_{2p, 2p} - E_{2p+1, 2p+1} \in \mathfrak{l}_{\mathcal{V}} + \mathfrak{m}_{\mathcal{V}}$ et $E_{2p-1, 2p+1}, E_{2p-2, 2p} \in \mathfrak{m}_{\mathcal{V}}$, on voit alors que, pour $1 \leq j \leq p$,

$$\langle g, [E_{2j, 2j+1}, D_p] \rangle = 0.$$

Enfin, pour calculer le crochet $[E_{i, j}, D_p]$ avec $2 \leq i+1 < j \leq 2p+1$, on distingue suivant la parité de i et j .

(i) Pour $i = 2k'$ et $j = 2l'$ avec $k' + 1 \leq l' \leq p$, on a

$$[E_{2k', 2l'}, D_p] = \begin{cases} -\frac{1}{2} \tau_p e_{2k'} \wedge e_{2p-1} + \frac{1}{2} \zeta_p e_{2k'} \wedge e_{2p+1} = 0 \bmod(\ker(n)) & \text{si } l' = p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que

$$\langle g, [E_{2k', 2l'}, D_p] \rangle = 0.$$

(ii) Pour $i = 2k'$ et $j = 2l' + 1$ avec $1 \leq k' < l' \leq p$, on a

$$[E_{2k', 2l'+1}, D_p] = \begin{cases} E_{2k', 2p} - \tau_p u \wedge_B e_{2k'} - \frac{1}{2} \zeta_p e_{2k'} \wedge e_{2p} & \text{si } l' = p, \\ -u \wedge_B e_{2k'} - \frac{\tau_p}{2\zeta_p} E_{2k', 2p} + \frac{1}{2} \tau_p e_{2k'} \wedge e_{2p} & \text{si } l' = p-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que $[E_{2k', 2l'+1}, D_p] \in \mathfrak{m}_{\mathcal{V}} + \ker(n)$ de sorte que

$$\langle g, [E_{2k', 2l'+1}, D_p] \rangle = 0.$$

(iii) Pour $i = 2k' + 1$ et $j = 2l'$ avec $1 \leq k' + 1 < l' \leq p$, on a

$$[E_{2k'+1,2l'}, D_p] = \begin{cases} -\frac{1}{2} \tau_p e_{2k'+1} \wedge e_{2p-1} + \frac{1}{2} \zeta_p e_{2k'+1} \wedge e_{2p+1} & \text{si } l' = p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit alors que

$$[E_{2k'+1,2l'}, D_p] = \begin{cases} 0 \bmod(\ker(n)) & \text{si } l' = p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que

$$\langle g, [E_{2k'+1,2l'}, D_p] \rangle = 0.$$

(iv) Pour $i = 2k' + 1$ et $j = 2l' + 1$ avec $0 \leq k' < l' \leq p$, on a

$$[E_{2k'+1,2l'+1}, D_p] = \begin{cases} E_{2k'+1,2p} - \tau_p u \wedge_B e_{2k'+1} - \frac{1}{2} \zeta_p e_{2k'+1} \wedge e_{2p} & \text{si } l' = p, \\ -u \wedge_B e_{2k'+1} - \frac{\tau_p}{2\zeta_p} E_{2k'+1,2p} + \frac{1}{2} \tau_p e_{2k'+1} \wedge e_{2p} & \text{si } l' = p - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par suite, on a les résultats suivants:

- Pour $l' < p - 1$, on a

$$[E_{2k'+1,2l'+1}, D_p] = 0.$$

- Pour $l' = p - 1$, on a

$$[E_{2k'+1,2l'+1}, D_p] \in \mathfrak{m}_{\mathcal{V}} + \ker(n).$$

- Pour $l' = p$ et $k' < p - 1$

$$[E_{2k'+1,2l'+1}, D_p] \in \mathfrak{m}_{\mathcal{V}} + \ker(n).$$

- Pour $l' = p$ et $k' = p - 1$, on a

$$\begin{aligned} [E_{2k'+1,2l'+1}, D_p] &= E_{2p-1,2p} - \tau_p u \wedge_B e_{2p-1} - \frac{1}{2} \zeta_p e_{2p-1} \wedge e_{2p} \\ &= \frac{1}{2} Z_p - \frac{1}{2} \zeta_p e_{2p-1} \wedge e_{2p} \bmod(\ker(n)). \end{aligned}$$

Compte tenu de nos hypothèses sur la forme linéaire g , il suit que

$$\langle g, [E_{2k'+1,2l'+1}, D_p] \rangle = 0, \quad 0 \leq k' < l' \leq p.$$

D'après ce qui précède, on voit que

$$\langle g, [D_p, Y] \rangle = 0, \quad \text{pour tout } Y \in \mathfrak{g}.$$

On a donc $D_p \in \mathfrak{g}(g)$.

Remarquons que la famille $\{C_k, 1 \leq k \leq p - 1, D_p\}$ est une famille libre de $\mathfrak{g}(g)$.

De plus, comme $\dim(\mathfrak{g}(g)) = h(\mathcal{V}) = p$, cette famille est maximale et donc elle forme une base de $\mathfrak{g}(g)$. On a donc

$$\mathfrak{g}(g) = \bigoplus_{k=1}^{p-1} \mathbb{K}C_k \oplus \mathbb{K}D_p.$$

On pose $R_k = E_{2k-1,2k-1} + E_{2k+1,2k+1}$. On a $R_k \in \mathfrak{g}$ pour tout $1 \leq k \leq p$ et on a

$$[R_k, C_k] = C_k, \quad 1 \leq k \leq p-1 \text{ et } [R_p, D_p] = D_p,$$

de sorte que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] \cap \mathfrak{g}(g) \neq \{0\}$. Ceci montre alors que, compte tenu du lemme 2.10 et du fait que la forme linéaire g est générique, $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est non stable. ■

Pour achever la démonstration du théorème, on considère le cas où (q, r) vérifie (6) et le drapeau $\mathcal{V}$ vérifie la condition (*) sans que les sous-espaces V_i du drapeau soient tous de dimension impaire pour $1 \leq i \leq t-1$. On reprend les notations des cas précédents.

Soit donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ avec $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de sous-espaces isotropes vérifiant la condition (*) et (q, r) la condition (6). En particulier $\dim F \leq 2$ et si $\dim F = 2$, $r = \dim V$ est impair.

On a $\mathfrak{g} = (\mathfrak{q}_{\mathcal{V}} \times \mathfrak{so}(F)) \oplus \mathfrak{n}_V$ avec $\mathfrak{n}_V = F \wedge_B V \oplus \mathfrak{z}_V$ et $\mathfrak{z}_V = \Lambda_B^2 V$.

Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ générique. On peut supposer que $\xi = g|_{\mathfrak{z}_V} \in \Lambda_B^2 V^*$ est générique relativement à $\mathcal{V}$. On considère ξ comme un élément de $\mathfrak{n}_V^*$ noté alors n_{ξ} . Par généricité de g et compte tenu des numéros 5.16, 5.18 et 5.19 de [6], on peut supposer que $n = g|_{\mathfrak{n}_V} = n_{\xi}$ si r est pair et $n = n_{\xi} + l \wedge e_r^*$, avec $l \in F^*$ non isotrope, si r est impair.

Soit $k_0 = 0 < k_1 < \cdots < k_{s-1} < k_s = t$ ceux des indices $j \in 0, \dots, t$ tels que $\dim V_j$ soit pair ou $j = t$. Pour $1 \leq i \leq s$, on pose $W_i = V_{k_i} \cap V_{k_{i-1}}^{\perp_{\xi}}$ et on désigne par $\mathcal{V}_i$ la trace du drapeau $\mathcal{V}$ sur le sous-espace W_i . On a $V = \bigoplus_{i=1}^s W_i$.

Soit $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$ le sous-drapeau constitué des espaces V_{k_i} , $0 \leq i \leq s$. On a

$$\mathfrak{q}_{\mathcal{V}} = \prod_{i=1}^s \mathfrak{q}_{\mathcal{V}_i} \oplus {}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}$$

où $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}_i}$ désigne la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}(W_i)$ qui stabilise le drapeau $\mathcal{V}_i$ et ${}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}$ le radical unipotent de la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}$. Comme

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{n}_V = \begin{cases} \mathfrak{r}_{\mathcal{V}} + \mathfrak{n}_V & \text{si } r \text{ est pair ou } F = 0, \\ \mathfrak{r}_{\mathcal{V}'} \oplus \mathbb{K}T_p + \mathfrak{n}_V & \text{si } r \text{ est impair et } F \neq 0. \end{cases}$$

et $\exp(\mathfrak{n}_V(n)).g = g + (\mathfrak{h} + \mathfrak{n}_V)^{\perp}$, on peut supposer que $g|_{{}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}} = 0$.

On pose $\tilde{s} = s$, si $F = 0$ ou r est pair, et $\tilde{s} = s-1$, si $F \neq 0$ et r est impair. On considère les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{q}_{\mathcal{V}_i} \oplus \mathfrak{z}_{W_i}$, pour $1 \leq i \leq \tilde{s}$ et, si $F \neq 0$ et r est impair, $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{q}_{\mathcal{V}_s} \times \mathfrak{so}(F) \oplus \mathfrak{n}_{W_s}$ (en convenant que $\mathfrak{n}_{W_s} = F \wedge_B W_s \oplus \mathfrak{z}_{W_s}$). Enfin, on note $g_i = g|_{\mathfrak{g}_i}$, $1 \leq i \leq s$. Alors, on a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_i \oplus \left(\prod_{j \neq i} \mathfrak{q}_{\mathcal{V}_j} \right) \oplus {}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}} \oplus F \wedge_B V \oplus (\bigoplus_{k < l} W_k \wedge_B W_l) \oplus (\bigoplus_{j \neq i} \wedge_B^2 W_j), \quad 1 \leq i \leq \tilde{s},$$

et si $F \neq 0$ et r est impair, on a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_s \oplus \left(\prod_{j < s} \mathfrak{q}_{\mathcal{V}_j} \right) \oplus {}^u \mathfrak{q}_{\mathcal{V}} \oplus (\oplus_{j < s} F \wedge_B W_j) \oplus (\oplus_{k < l} W_k \wedge_B W_l) \oplus (\oplus_{j < s} \wedge_B^2 W_j).$$

En regardant les crochets de $\mathfrak{g}_i$ avec les différents autres sous-espaces apparaissant dans cette décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe, on peut montrer que $\mathfrak{g}_i(g_i) \subset \mathfrak{g}(g)$.

Compte tenu de nos hypothèses, il existe deux sous-espaces consécutifs du drapeau $\mathcal{V}$ qui sont tous deux de dimension impaire. Ainsi l'une au moins des $\mathfrak{g}_i$ n'est pas stable d'après le cas précédent. Comme $\mathfrak{g}_i(g_i) \subset \mathfrak{g}(g)$, il résulte alors du lemme 2.10 que $\mathfrak{g}$ n'est pas stable. ■

Remarque 6.6. On garde les notations précédentes. Comme la forme linéaire g est générique, il existe un ouvert de Zariski U G -invariant contenant g . Ainsi et comme $g \in {}^u \mathfrak{q}_{\mathcal{V}}^\perp$, où ${}^u \mathfrak{q}_{\mathcal{V}}^\perp$ désigne l'orthogonal de ${}^u \mathfrak{q}_{\mathcal{V}}$ dans $\mathfrak{g}^*$, $U \cap {}^u \mathfrak{q}_{\mathcal{V}}^\perp$ est un ouvert de Zariski non vide de ${}^u \mathfrak{q}_{\mathcal{V}}^\perp$. Soit φ la projection de ${}^u \mathfrak{q}_{\mathcal{V}}^\perp$ dans $\mathfrak{g}_i^*$. Comme $\varphi(U \cap {}^u \mathfrak{q}_{\mathcal{V}}^\perp)$ est un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{g}_i^*$, on voit alors que $g_i = g|_{\mathfrak{g}_i}$ est générique. Ainsi et compte tenu du cas précédent, on a une formule explicite pour le stabilisateur $\mathfrak{g}_i(g_i)$.

Lorsque $\mathfrak{g}$ est de rang nul, en utilisant le résultat qui donne l'indice de $\mathfrak{g}$ et des $\mathfrak{g}_i$ dans le théorème 6.1, on déduit que $\mathfrak{g}(g) = \oplus_i \mathfrak{g}_i(g_i)$. Comme on a déterminé explicitement $\mathfrak{g}_i(g_i)$ dans le cas précédent, on a alors une formule explicite pour le stabilisateur d'une forme linéaire générique.

Remerciements. Je remercie Pierre Torasso et Mohamed-Salah Khalgui qui m'ont proposé ce travail. Je remercie également Michel Duflo et le rapporteur pour d'utiles remarques.

Références

- [1] Baur, K., and A. Moreau, *Quasi-reductive (bi)parabolic subalgebras in reductive Lie algebras*, Journal of Algebra **41** (2011), 417–451.
- [2] Charbonnel, J.-Y., *Sur les orbites de la représentation coadjointe*, Compositio Math. **46** (1982), 273–305.
- [3] Dixmier, J., “Enveloping algebras,” Graduate Studies in Mathematics, Amer. Math. Soc., 1996.
- [4] Duflo, M. *Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie*, in: Harmonic Analysis and Group Representations, 1982, 129–221.
- [5] —, *Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques*, Acta. Math. **149** (1982), 153–213.
- [6] Duflo, M., M. S. Khalgui et P. Torasso, *Algèbres de Lie quasi-réductives*, Transformation Groups **17** (2012), 417–470.
- [7] Duflo, M. et M. Vergne, *Une propriété de la représentation co-adjointe d'une algèbre de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. **268** (1969), A583–A585.

- [8] Dvorsky, A., *Index of parabolic and seaweed subalgebras of $\mathfrak{so}_n$* , Linear Algebra and its Applications **374** (2003), 127–142.
- [9] Joseph, A., *A preparation theorem for the prime spectrum of a semisimple Lie algebra*, Journal of Algebra **48** (1977), 241–289.
- [10] Kosmann, Y. et S. Sternberg, *Conjugaison des sous-algèbres d’isotropie*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. **279** (1974), 777–779.
- [11] Kostant, B., *The cascade of orthogonal roots and the coadjoint structure of the nilradical of a Borel subgroup of a semisimple Lie group*, arXiv preprint arXiv:1101.5382, 2011.
- [12] Panyushev, D. I., *An extension of Raïs’ theorem and seaweed subalgebras of simple Lie algebras*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), 693–715.
- [13] Tauvel, P. et R. W. T. Yu, *Indice et formes linéaires stables dans les algèbres de Lie*, Journal of Algebra **273** (2004), 507–516.
- [14] —, “Lie algebras and algebraic groups,” Springer-Verlag, New York, etc.2005.

Kais Ammari
Université Tunis El-Manar
Faculté des sciences de Tunis
Département de Mathématiques
Campus universitaire
2092 El-Manar, Tunis, Tunisie
kais.amari@math.univ-poitiers.fr
ammarikais10@yahoo.fr

Received December 11, 2012
and in final form June 17, 2013