

Restrictions des séries discrètes de certains groupes résolubles

Sami Kouki

Communicated by J. Faraut

Abstract. The study of restrictions of unitary irreducible representations of a Lie group G to its closed subgroups was successfully made by Corwin-Greenleaf for the nilpotent case, Lipsman for the completely solvable case and Fujiwara for the exponential case. However, even if the orbit method describes a large set of representations in $\widehat{G}$, the study of these restrictions remains a very difficult problem in the general case.

In this work, we study the restriction of square integrable representations modulo the center of a solvable connected group, semi-direct product of a torus by a Heisenberg group to its algebraic connected subgroups.

Mathematics Subject Classification 2010: 06B15.

Key Words and Phrases: Discrete series, representations, restriction, multiplicities.

1. Notations

1. Dans la suite on note $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Soient $m \in \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ et $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$. On note $\alpha! = \alpha_1! \times \dots \times \alpha_m!$ et $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \times \dots \times z_m^{\alpha_m}$.
2. Si V est un espace vectoriel réel, on désignera par V^* l'espace vectoriel dual. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On désigne par $p_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$ l'application de projection et par $\mathfrak{h}^\perp$ le sous-espace de $\mathfrak{g}^*$ orthogonal à $\mathfrak{h}$.
3. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire alternée B . On note V^B l'orthogonal de V relativement à B . On note $Mp(V/V^B)$ le groupe métaplectique associé au groupe symplectique $Sp(V/V^B)$ [8, 19] et ϵ l'élément non trivial du noyau de la projection naturelle de $Mp(V/V^B)$ sur $Sp(V/V^B)$. Soit A un groupe opérant dans V par des automorphismes linéaires conservant B ; il opère dans V/V^B . Nous noterons A^V le groupe des couples $(h, m) \in A \times Mp(V/V^B)$, tels que h et m aient même image dans $Sp(V/V^B)$.
4. Supposons que (V, B) soit symplectique et soit $V^\mathbb{C}$ le complexifié de V . On désigne par $v \mapsto \bar{v}$ la conjugaison des éléments de $V^\mathbb{C}$ par rapport à V . Un lagrangien $\ell \subset V^\mathbb{C}$ est dit totalement complexe si $\ell \cap \bar{\ell} = \{0\}$. Soit F la forme

hermitienne définie sur $V^{\mathbb{C}}$ par $F(v, w) = iB(v, \overline{w})$. On dit que ℓ est positif si la restriction de F à ℓ est positive.

5. Soit R un tore. Le groupe des caractères $\widehat{R}$ de R s'identifie à un réseau du dual $\mathfrak{r}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$ de R au moyen de l'application qui à un caractère χ fait correspondre la forme linéaire $-id\chi$.

2. Principaux résultats

Soit $G = S^uG$ le groupe produit semi-direct d'un tore S par un groupe de Heisenberg uG et tel que G et uG aient même centre Z . On désigne par $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}$, ${}^u\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{z}$ les algèbres de Lie respectives de G , S , uG et Z .

Soit $\lambda \in \mathfrak{z}^* \setminus \{0\}$; on pose $\mathfrak{g}_\lambda^* = \{g \in \mathfrak{g}^*, g|_{\mathfrak{z}} = \lambda\}$. Ceci détermine une forme bilinéaire B (ou B_λ si l'on tient à préciser) alternée sur ${}^u\mathfrak{g}$ définie par $B(X, Y) = \lambda([X, Y])$, laquelle passe au quotient en une forme symplectique sur ${}^u\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$, encore notée B . Ainsi, si $W \subset {}^u\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ est un sous-espace symplectique, on peut parler de sous-espace lagrangien (complexe) positif de $W^{\mathbb{C}}$. Notons qu'à une orbite fortement régulière (voir définition 4.1) $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ est associée une forme bilinéaire alternée B (ou B_Ω) puisque $\Omega|_{\mathfrak{z}} = \{\lambda\}$ où $\lambda \in \mathfrak{z}^* \setminus \{0\}$.

Soit $V \subset {}^u\mathfrak{g}$ un supplémentaire S -invariant de $\mathfrak{z}$. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ non nulles sur le centre et qui sont dans $V^\perp$.

Soit $\lambda \in \mathfrak{z}^* \setminus \{0\}$, on note $\mathcal{E}_\lambda$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ formé des éléments dont la restriction à $\mathfrak{z}$ est égal à λ . Si $g \in \mathfrak{g}^*$, on désigne par Ω_g (ou Ω_g^G si l'on tient à préciser) sa G -orbite coadjointe. Alors l'application $g \mapsto \Omega_g$ est une bijection de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}_\lambda$) sur l'ensemble des orbites fortement régulières (resp. contenues dans $\mathfrak{g}_\lambda^*$).

Si $\nu \in \mathfrak{s}^*$, on note g_ν (ou $g_{\lambda, \nu}$) l'élément de $\mathcal{E}_\lambda$ tel que $g_{\nu|_{\mathfrak{s}}} = \nu$. Alors $\nu \mapsto g_\nu$ est une bijection de $\mathfrak{s}^*$ sur $\mathcal{E}_\lambda$.

Désignons par $\mathcal{E}_{ad}$ (resp. $\mathcal{E}_{\lambda, ad}$) le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}_\lambda$) constitué des formes linéaires qui sont admissibles (voir définition 6.1).

Soit $\ell \subset V^{\mathbb{C}}$ un lagrangien totalement complexe positif S -invariant et soit $\rho \in \mathfrak{s}^*$ la forme linéaire définie par $i\rho(\xi) = \frac{1}{2}\text{Tr ad}_\ell(\xi)$. Alors l'application $\nu \mapsto g_\nu$ est une bijection de l'ensemble des $\nu \in \mathfrak{s}^*$ telles que $\nu + \rho$ soit un caractère de S (cet ensemble ne dépend pas du choix de ℓ) sur $\mathcal{E}_{\lambda, ad}$ [8].

A toute forme linéaire fortement régulière et admissible g est associée par la construction de Duflo [8] une représentation unitaire irréductible π_g^G de G . Cette représentation ne dépend que de l'orbite Ω_g , c'est une série discrète modulo Z de caractère central de différentielle $i\lambda$ où $\lambda = g|_{\mathfrak{z}}$. Toutes les séries discrètes modulo Z sont obtenues ainsi. En particulier, l'application $g \mapsto \pi_g^G$ est une bijection de $\mathcal{E}_{ad}$ (resp. $\mathcal{E}_{\lambda, ad}$) sur l'ensemble des séries discrètes modulo Z (resp. de caractère central de différentielle $i\lambda$) de G .

Soit R un sous-tore de S d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$ et uH un sous-groupe fermé connexe de uG d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ qui soit R -invariant. Notons $H = R \ltimes {}^uH$ le sous-groupe de G , produit semi-direct de R et uH , d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Tout sous-groupe algébrique connexe de G est conjugué à un tel sous-groupe H .

Soit $\lambda \in \mathfrak{z}^* \setminus \{0\}$ et B la forme bilinéaire alternée associée. Si uH est un sous-groupe de Heisenberg de uG , ${}^u\mathfrak{h}/\mathfrak{z}$ est un sous-espace symplectique de ${}^u\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ et

on choisit un lagrangien positif R -invariant ℓ' du complexifié de l'orthogonal pour B de ${}^u\mathfrak{h}/\mathfrak{z}$ dans ${}^u\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ et on désigne par $\Delta(\ell') = \{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ l'ensemble des poids de R dans ℓ' comptés avec leur multiplicité. Si $\chi \in \widehat{R}$, on note $m(\chi)$ la fonction de partition définie par

$$m(\chi) := \text{card}\{\alpha \in \mathbb{N}^r, \sum_{1 \leq j \leq r} \alpha_j \delta_j = \chi\}. \quad (1)$$

Le nombre $m(\chi) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ne dépend pas du choix du lagrangien positif.

Soient R_0 le noyau dans R de $\text{Ad}_{({}^u\mathfrak{h}/\mathfrak{z})^B}$ et $\mathfrak{r}_0$ son algèbre de Lie. Alors $R_1 = R/R_0$ est un tore compact dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}/\mathfrak{r}_0$ et le dual de cette dernière est $\mathfrak{r}_0^\perp$ qui est l'orthogonal de $\mathfrak{r}_0$ dans $\mathfrak{r}^*$. La famille $\Delta(\ell')$ engendre $\mathfrak{r}_0^\perp$. On note $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ le cône d'intérieur non vide de $\mathfrak{r}_0^\perp$ engendré par $\Delta(\ell')$: $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} = \sum_{\delta \in \Delta(\ell')} \mathbb{R}_+ \delta$.

Définition 2.1. Soit $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite fortement régulière et B la forme bilinéaire alternée associée. On dit que le sous-groupe $H \subset G$ vérifie la condition $\mathcal{P}(\Omega)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- (i) Le radical unipotent uH de H est un sous-groupe de Heisenberg de uG .
- (ii) L'ensemble des points fixes de R dans ${}^u\mathfrak{g}/{}^u\mathfrak{h}$ est réduit à $\{0\}$ et il existe un lagrangien R -invariant positif de $(({}^u\mathfrak{h}/\mathfrak{z})^B)^\mathbb{C}$ pour lequel l'ensemble des poids infinitésimaux de R est contenu dans un demi-espace ouvert de $\mathfrak{r}^*$

Théorème 2.2. Soit $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite fortement régulière. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) L'application $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} : \Omega \rightarrow \mathfrak{h}^*$ est propre sur l'image.
- (ii) Le sous-groupe H vérifie la propriété $\mathcal{P}(\Omega)$.

Soit π une série discrète de G associée à une orbite fortement régulière $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) La représentation π est H -admissible
- (ii) Le sous-groupe H vérifie la propriété $\mathcal{P}(\Omega)$.

Notons que la propriété $\mathcal{P}(\Omega)$ caractérise d'une manière simple l'admissibilité des séries discrètes du groupe G .

Théorème 2.3. Soit Ω une orbite fortement régulière. On suppose que uH est un sous-groupe de Heisenberg de uG . Notons g l'élément de $\mathcal{E}$ tel que $\Omega = \Omega_g^G$ et $h = g|_{\mathfrak{h}}$. Alors

- (i) $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(\Omega_g^G)$ est la réunion disjointe des orbites $\Omega_{h+\mu}^H$ avec $\mu \in C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$.

- (ii) On suppose que g est admissible. Soit ℓ' un lagrangien R -invariant positif de $((\mathfrak{h}/\mathfrak{z})^B)^{\mathbb{C}}$ et soit ρ' la forme linéaire sur $\mathfrak{r}$ telle que $i\rho' = \frac{1}{2}\mathrm{Tr} \mathrm{ad}_{\ell'}$. Alors pour tout $\chi \in \widehat{R}$, la forme linéaire $h + \chi + \rho' \in \mathfrak{h}^*$ est admissible et les orbites admissibles qui sont contenues dans $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(\Omega_g^G)$ sont les $\Omega_{h+\chi+\rho'}^H$ avec $\chi \in \widehat{R}$ et $\chi + \rho' \in C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$. Les représentations unitaires irréductibles de H qui apparaissent dans la restriction $(\pi_g^G)|_H$ sont des séries discrètes associées aux orbites admissibles contenues dans $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(\Omega_g^G)$. Plus précisément, on a la décomposition en représentations irréductibles :

$$(\pi_g^G)|_H = \bigoplus_{\chi \in \widehat{R}} m(\chi) \pi_{h+\chi+\rho'}^H.$$

Pour finir, utilisant les résultats de [4] et [5], nous interprétons les multiplicités $m(\chi)$ comme fonctions de partitions et nous en donnons une formule explicite en terme de volumes des espaces réduits.

De manière plus générale soit G un groupe de Lie presque algébrique réel (pour la définition, voir Duflo [10]) d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, H un sous-groupe presque algébrique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ la projection naturelle de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{h}^*$, π une série discrète de G et Ω l'orbite co-adjointe de G à laquelle π est associée par la construction de Duflo. Alors Duflo conjecture que la représentation π est H -admissible si et seulement la restriction de $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ à Ω est propre en un sens à préciser (voir par exemple Liu [20]). Le théorème 2.2 donne, dans le cas présent, une réponse positive à cette conjecture.

D'autre part, le théorème 2.3 est en rapport avec la conjecture de Guillemin-Sternberg connue sous la forme du slogan « la quantification commute avec la réduction » portant sur l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique M et qui a suscité de nombreux travaux, principalement dans le cas des groupes compacts et des groupes réductifs. En effet, Duistermaat-Guillemin-Meinrenken-Wu [12], Guillemin [15], Jeffrey-Kirwan [17], Meinrenken [21] et Vergne [33] ont simultanément donné des démonstrations de la conjecture de Guillemin-Sternberg dans le cas où $G = S^1$. Puis Meinrenken [22] et Meinrenken-Sjamaar [23] l'ont démontrée lorsque G est un groupe compact connexe quelconque et enfin, Tian-Zhang [27, 28, 29, 30], Zhang [34, 35] puis Paradan [25, 24] dans le cas des variétés à bord, variétés non compactes, application moment abstraite, familles, indices de fibrés positifs.

3. Réduction au cas où H contient le centre de G .

Soit G un groupe de Lie connexe de centre Z d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{z}$. On suppose que H est un sous-groupe fermé connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ tel que $\tilde{H} = HZ$ soit un sous-groupe fermé connexe de G d'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} + \mathfrak{z}$. Si π est une représentation unitaire de G et σ une représentation unitaire irréductible de H , on note $m(\sigma, \pi)$ la multiplicité de σ comme sous-représentation de $\pi|_H$.

Lemme 3.1. 1. Soit Ω une orbite coadjointe de G . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la projection $p_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}$ est propre de Ω sur son image.
- (ii) la projection $p_{\mathfrak{g}, \check{\mathfrak{h}}}$ est propre de Ω sur son image.

2. Soit π une représentation unitaire de G . Les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) π est H -admissible.
- (ii) π est $\check{H}$ -admissible.

De plus, pour toute représentation unitaire irréductible σ de $\check{H}$, $\sigma|_H$ est irréductible et on a $m(\sigma, \pi) = m(\sigma|_H, \pi)$.

Preuve. Les assertions (1) et (2) sont immédiates. ■

Dans la suite G désigne un groupe résoluble connexe produit semi-direct d'un tore S par le groupe de Heisenberg uG et H un sous-groupe de G comme dans le numéro 2, de la forme $R \ltimes {}^uH$ où R est un sous-tore de S et uH est un sous-groupe fermé connexe et R -invariant de uG . Comme S est compact connexe, il opère trivialement dans le centre Z de uG lequel est également le centre de G .

Dans cette situation, il est immédiat que HZ est un sous-groupe fermé de G . Il suit alors du lemme (3.1) que, pour démontrer les théorèmes (2.2) et (2.3), on peut supposer que Z est contenu dans H . Ce que nous supposons désormais.

4. Formes fortement régulières

Les groupes G et H sont comme indiqués à la fin de la section 3. Ces deux groupes sont algébriques; nous décrivons les formes fortement régulières et leurs stabilisateurs pour H (le cas de G en résulte).

Rappelons qu'une forme linéaire $h \in \mathfrak{h}^*$ est dite régulière si la dimension de son stabilisateur $\mathfrak{h}(h)$ est minimale. Dans ce cas, $\mathfrak{h}(h)$ est abélienne [11], [7, ChI, §11]. Notons $\mathfrak{j}^h$ l'algèbre de Lie réductive maximale dans $\mathfrak{h}(h)$. On a la décomposition de Levi $\mathfrak{h}(h) = \mathfrak{j}^h \oplus {}^u\mathfrak{h}(h)$ (${}^u\mathfrak{h}(h)$ est une sous-algèbre abélienne formée d'éléments nilpotents). Si on note $\mathfrak{h}_{reg}^*$ le sous-ensemble de $\mathfrak{h}^*$ formée des éléments réguliers, alors on a la définition suivante due à Duflo [8, Appendice].

Définition 4.1. Une forme linéaire $h \in \mathfrak{h}^*$ est dite fortement régulière si elle est régulière et si la dimension de $\mathfrak{j}^h$ est maximale parmi les $\dim \mathfrak{j}^f$, $f \in \mathfrak{h}_{reg}^*$.

Soit $\lambda \in \mathfrak{z}^* \setminus \{0\}$ et B la forme bilinéaire associée. Posons $W = {}^u\mathfrak{h} \cap V$ et soit W_0 le noyau de la restriction de B à W . Alors W et W_0 sont des sous-espaces R -invariants de V . Soit W_1 un supplémentaire R -invariant de W_0 dans W : c'est un sous-espace symplectique de V . Alors ${}^u\mathfrak{h}_0 := W_0$ est un idéal central de ${}^u\mathfrak{h}$ et ${}^u\mathfrak{h}_1 := W_1 \oplus \mathfrak{z}$ est un idéal de Heisenberg de ${}^u\mathfrak{h}$. Pour $i = 0, 1$, on désigne par uH_i le sous-groupe unipotent d'algèbre de Lie ${}^u\mathfrak{h}_i$. On a ${}^u\mathfrak{h} = {}^u\mathfrak{h}_0 \times {}^u\mathfrak{h}_1$ et ${}^uH = {}^uH_0 \times {}^uH_1$, produit direct.

On dit qu'une forme linéaire $\mu \in W_0^*$ est R -régulière si la dimension de sa R -orbite est maximale.

Lemme 4.2. Soit $h \in \mathfrak{h}^*$.

1. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) h est fortement régulière.

(ii) La forme linéaire $h|_{W_0}$ sur W_0 est R -régulière. De plus, $h|_{\mathfrak{z}} \neq 0$ si $W_1 \neq 0$.

2. Dans toute orbite fortement régulière, on peut trouver une forme linéaire h telle que $h|_{W_1} = 0$. Dans ce cas, si $\mu = h|_{W_0}$, on a $\mathfrak{h}(h) = \mathfrak{r}(\mu) \oplus (\mathfrak{r}.\mu)^\perp \oplus \mathfrak{z}$ (l'orthogonal est celui de la dualité entre W_0 et W_0^*).

Preuve. Supposons que $W_1 = 0$. Alors $W_0 = W$, B est nulle sur W et $\mu = h|_W$. Pour tout $X \in \mathfrak{h} = \mathfrak{r} \oplus W \oplus \mathfrak{z}$, on note respectivement $X_{\mathfrak{r}}$, X_W et $X_{\mathfrak{z}}$ ses composantes dans $\mathfrak{r}$, W et $\mathfrak{z}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(h) &= \{X_{\mathfrak{r}} + X_W + X_{\mathfrak{z}} \in \mathfrak{h}; h([X_{\mathfrak{r}} + X_W + X_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{r} \oplus W \oplus \mathfrak{z}]) = 0\} \\ &= \{X_{\mathfrak{r}} + X_W \in \mathfrak{r} \oplus W; h([X_{\mathfrak{r}}, W]) = h([X_W, \mathfrak{r}]) = 0\} \oplus \mathfrak{z} \\ &= \{X_{\mathfrak{r}} + X_W \in \mathfrak{r} \oplus W; \mu([X_{\mathfrak{r}}, W]) = \mu([X_W, \mathfrak{r}]) = 0\} \oplus \mathfrak{z} \\ &= \{X_{\mathfrak{r}} + X_W \in \mathfrak{r} \oplus W; X_{\mathfrak{r}} \in \mathfrak{r}(\mu) \text{ et } X_W \in (\mathfrak{r}.\mu)^\perp\} \oplus \mathfrak{z} \\ &= \mathfrak{r}(\mu) \oplus (\mathfrak{r}.\mu)^\perp \oplus \mathfrak{z}, \end{aligned}$$

l'orthogonal étant celui de la dualité entre W_0 et W_0^* . On en déduit que $\dim H.h = 2(\dim \mathfrak{r} - \dim \mathfrak{r}(\mu))$. Ainsi, la forme linéaire h est régulière si et seulement si μ est R -régulière. Dans ce cas, il est clair que $\dim \mathfrak{r}(\mu)$ reste constante lorsque h est régulière, ce qui montre que h est aussi fortement régulière. D'où l'assertion (1) dans ce cas.

Supposons désormais que $W_1 \neq 0$ et notons $n = h|_{\mathfrak{w}_1}$. Supposons que $h|_{\mathfrak{z}} \neq 0$. On a ${}^uH_1.n = n + \mathfrak{z}^\perp$. Ainsi, quitte à traduire h par un élément de uH_1 , on peut supposer que $h|_{W_1} = 0$. Calculons dans ce cas $\mathfrak{h}(h)$. Pour $X \in \mathfrak{h} = \mathfrak{r} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \mathfrak{z}$, on note respectivement $X_{\mathfrak{r}}$, X_0 et X_1 ses composantes dans $\mathfrak{r}$, W_0 et W_1 .

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(h) &= \{X_{\mathfrak{r}} + X_0 + X_1 | h([X_{\mathfrak{r}} + X_0 + X_1, \mathfrak{r} \oplus W_0 \oplus W_1]) = 0\} \oplus \mathfrak{z} \\ &= \{X_{\mathfrak{r}} + X_0 + X_1 | \mu([X_{\mathfrak{r}}, W_0]) = 0, \mu([X_0, \mathfrak{r}]) = 0, h([X_1, W_1]) = 0\} \oplus \mathfrak{z}. \end{aligned}$$

Comme $h|_{\mathfrak{z}} \neq 0$, $[X_1, W_1] = 0$ et donc $X_1 = 0$ car W_1 est symplectique. Ainsi,

$$\mathfrak{h}(h) = \mathfrak{r}(\mu) \oplus (\mathfrak{r}.\mu)^\perp \oplus \mathfrak{z},$$

l'orthogonal étant pris dans W_0 . On voit donc que $\mathfrak{r}(\mu)$ est un facteur réductif de $\mathfrak{h}(h)$. Comme l'ensemble des formes h vérifiant $h|_{\mathfrak{z}} \neq 0$ est un ouvert de Zariski, parmi elles il y a des formes fortement régulières et celles-ci sont clairement celles pour lesquelles μ est R -régulière; dans ce cas, on a $\mathfrak{j}^h = \mathfrak{r}(\mu)$. En particulier, pour une telle forme h fortement régulière et pour toute forme R -régulière $\mu \in W_0^*$, on a $\dim H.h = 2(\dim \mathfrak{r} - \dim \mathfrak{r}(\mu)) + \dim W_1$.

Il reste à voir que si $h|_{\mathfrak{z}} = 0$, alors h n'est pas fortement régulière. Supposons donc $h|_{\mathfrak{z}} = 0$ et posons $\mu_i = h|_{W_i}$, $i = 0, 1$. Alors, en identifiant W^* avec $W_0^* \oplus W_1^*$, on a

$$\mathfrak{h}(h) = \mathfrak{r}(\mu_0) \cap \mathfrak{r}(\mu_1) \oplus (\mathfrak{r}(\mu_0 + \mu_1))^\perp \oplus \mathfrak{z}. \quad (2)$$

Si h est fortement régulière, on a $\dim \mathfrak{r}(\mu_0) \cap \mathfrak{r}(\mu_1) = \dim \mathfrak{r}(\mu)$ où $\mu \in W_0^*$ est R -régulière. Mais alors il suit de (2) que l'on a

$$\dim H.h = 2(\dim \mathfrak{r} - \dim \mathfrak{r}(\mu)) < 2(\dim \mathfrak{r} - \dim \mathfrak{r}(\mu)) + \dim W_1,$$

de sorte que h n'est pas régulière: une contradiction. ■

On sait que le groupe H admet des séries discrètes modulo un sous-groupe fermé central Δ si et seulement s'il existe une forme fortement régulière h telle que $H(h)$ soit compact modulo Δ [9]. On en déduit le

Corollaire 4.3. 1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *le groupe H admet des séries discrètes modulo son centre.*
- (ii) *l'idéal ${}^u\mathfrak{h}_0$ est central dans $\mathfrak{h}$.*
- (iii) *l'action de R dans W_0 est triviale.*

2. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *Le groupe H admet des séries discrètes modulo Z .*
- (ii) ${}^u\mathfrak{h}_0 = \{0\}$.

Remarque 4.4. Compte tenu de notre hypothèse sur S , le groupe H admet des séries discrètes modulo son centre si et seulement s'il admet des séries discrètes modulo le centre de uH .

5. Orbites fortement régulières pour G

Soient $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite fortement régulière, B la forme bilinéaire alternée sur ${}^u\mathfrak{g}$ qui s'en déduit (voir section 2) et $V \subset {}^u\mathfrak{g}$ un sous-espace supplémentaire de $\mathfrak{z}$ qui soit S -invariant. La forme B induit une forme bilinéaire alternée sur V que nous noterons encore B : c'est une forme symplectique laissée invariante par S . Autrement dit $\text{Ad}_V S$ est un tore compact du groupe symplectique $Sp(V)$ correspondant.

Pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ on a la décomposition en somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus V \oplus \mathfrak{z}$. On en déduit la décomposition en somme directe duale $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{s}^* \oplus V^* \oplus \mathfrak{z}^*$. En appliquant le lemme (4.2) à $\mathfrak{g}$, ce qui correspond à $W = V$, on a $W_0 = \{0\}$ (car B est non dégénérée sur V) et $W_1 = V$; le deuxième point affirme qu'il existe une forme linéaire $g \in \Omega$ qui est dans $\mathcal{E}$.

Si $X \in V$, on définit les formes linéaires $B_X \in V^*$ et $\Phi_X \in \mathfrak{s}^*$ en posant:

$$\begin{aligned} B_X(Y) &= B(X, Y), Y \in V, \\ \Phi_X(\xi) &= B(X, \xi.X), \xi \in \mathfrak{s}. \end{aligned}$$

Proposition 5.1. 1. *L'application $g \mapsto \Omega_g$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur l'ensemble des orbites fortement régulières dans $\mathfrak{g}^*$.*

2. *Soit $g \in \mathcal{E}$, alors l'application $g_\bullet : X \mapsto g_X := g - \frac{1}{2}\Phi_X - B_X$ est un difféomorphisme S -équivariant de V sur Ω_g .*

Preuve. On commence par montrer le point 2. Soient $g \in \mathcal{E}$. D'une part, S stabilise g . D'autre part, un calcul facile montre que, si $X \in V$, on a :

$$\mathrm{Ad}^*(\exp X) \cdot g = g - B_X - \frac{1}{2}\Phi_X. \quad (3)$$

Ainsi, l'orbite Ω_g s'écrit : $\Omega_g = \{g_X, X \in V\}$, et la deuxième assertion s'en déduit.

Montrons maintenant la première assertion. Soit $g_1, g_2 \in \mathcal{E}$ tels que $\Omega_{g_1} = \Omega_{g_2}$. Alors les formes linéaires g_1 et g_2 de $\mathfrak{g}^*$ sont conjuguées. Il existe donc $X \in V$ tel que $g_1 = (\exp X).g_2$. D'après (2),

$$g_1 = g_2 - \frac{1}{2}\Phi_X - B_X,$$

ce qui implique que $X = 0$ et l'application est donc injective. La surjectivité est une conséquence directe de la deuxième assertion du lemme (4.2). ■

6. Orbites admissibles et séries discrètes de G

On rappelle que ℓ est un lagrangien totalement complexe positif (pour $B = B_g$) et S -invariant dans $V^\mathbb{C}$ et $\rho \in \mathfrak{s}^*$ la forme linéaire définie par $i\rho(\xi) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr} \mathrm{ad}_\ell(\xi)$.

Soit $U(\ell)$ le stabilisateur de ℓ dans $Sp(V) : U(\ell)$ est le groupe unitaire pour la forme hermitienne sur ℓ définie par $\langle v, w \rangle = iB(v, \bar{w})$. Soit $\tilde{U}(\ell) = \{(x, u) \in U(\ell) \times \mathbb{C}^\times | u^2 = \det x\}$. Alors $\tilde{U}(\ell)$ est un revêtement à deux feuillets de $U(\ell)$ et l'injection naturelle de $U(\ell)$ dans $Sp(V)$ se relève de manière unique en une injection canonique de $\tilde{U}(\ell)$ dans $Mp(V)$ (voir par exemple [31]).

Compte tenu de nos hypothèses, on a $S \simeq \mathrm{Ad}_V(S) \subset U(\ell)$. On note S^V le revêtement métaplectique de S induit par son action adjointe dans V : on a donc $S^V = \{(x, u) \in S \times \mathbb{C}^\times | u^2 = \det \mathrm{Ad}_\ell x\}$. On désigne alors par $\tilde{S}$ (ou par $\tilde{S}^V$ s'il convient de préciser) la composante neutre de S^V et par $\widetilde{\mathrm{Ad}}_V$ le morphisme de $\tilde{S}$ dans $\tilde{U}(\ell)$ tel que $\widetilde{\mathrm{Ad}}_V(x, u) = (\mathrm{Ad}_V x, u)$. On définit le caractère $\det^{\frac{1}{2}}$ de $\tilde{U}(\ell)$ en posant $\det^{\frac{1}{2}}(x, u) = u$.

Définition 6.1. Soient $g \in \mathcal{E}$ et $\nu = g|_{\mathfrak{s}}$. On note $X(g)$ l'ensemble des classes de représentations unitaires τ de S^V vérifiant $\tau(\epsilon) = -1$ et telles que la différentielle de τ soit un multiple de $i\nu$. On dit que g est admissible si $X(g)$ est non vide.

Proposition 6.2. Soit $g \in \mathcal{E}$ et notons $\nu = g|_{\mathfrak{s}}$.

1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *g est admissible pour G ,*

(ii) $i(\nu + \rho)$ est la différentielle d'un caractère de S ,

(iii) $i\nu$ est la différentielle d'un caractère de S^V prenant la valeur -1 sur ϵ .

2. Si les assertions équivalentes du (1) sont vérifiées alors il existe un unique caractère ξ_g (resp. χ_g) de S (resp. S^V) de différentielle $i(\nu + \rho)$ (resp. $i\nu$ tel que $\chi_g(\epsilon) = -1$).

Preuve. Par définition, la forme linéaire g est admissible pour G s'il existe un caractère τ de S^V de différentielle $i\nu$ tel que $\tau(\epsilon) = -1$. Ce qui est équivalent à ce que $i\nu$ soit la différentielle d'un caractère χ_g de $\tilde{S}$ uniquement déterminé, vérifiant $\chi_g(\epsilon) = -1$ si $\epsilon \in \tilde{S}$.

Soit χ le caractère de S^V tel que $\chi(x) = \det^{\frac{1}{2}}(\widetilde{\text{Ad}}_V x)$. Alors χ est de différentielle $i\rho$ et vérifie $\chi(\epsilon) = -1$. Si on note $(S^V)_-^\wedge$ l'ensemble des caractères $\tau \in (S^V)^\wedge$ tels que $\tau(\epsilon) = -1$, alors $(S^V)_-^\wedge$ s'identifie à $\hat{S}$ par $\tau \mapsto \chi\tau$. On voit donc que g est admissible pour G si et seulement si $i(\nu + \rho)$ est la différentielle d'un unique caractère ξ_g de S . ■

Remarque 6.3. Si S^V n'est pas connexe, $\tilde{S}$ s'identifie canoniquement à S via la projection naturelle de S^V sur S .

Soit $g \in \mathcal{E}$ vérifiant les assertions équivalentes de la proposition précédente et notons $\lambda = g|_{\mathfrak{z}} \in \mathfrak{z}^* \setminus \{0\}$. Suivant Duflo [8], on construit une représentation unitaire irréductible π_g de G . Tout d'abord, soit π_λ (notée aussi π_λ^V , s'il convient de préciser) la représentation unitaire irréductible de uG associée à l'orbite $\lambda + \mathfrak{z}^\perp$ de uG dans ${}^u\mathfrak{g}^*$ par la méthode des orbites de Kirillov. On note $\mathcal{H}_\lambda$ (ou $\mathcal{H}_\lambda^V$) l'espace de la représentation π_λ . Supposons $V \neq 0$, Shale [26] a démontré qu'il existe une unique représentation S_λ (ou S_λ^V) de $Mp(V)$ dans $\mathcal{H}_\lambda$ vérifiant

$$\pi_\lambda(x.h) = S_\lambda(x)\pi_\lambda(h)S_\lambda(x^{-1}), \quad x \in Mp(V), \quad h \in {}^uG.$$

Par suite, la représentation π_λ s'étend en la représentation $S_\lambda\pi_\lambda$ du produit semi-direct $Mp(V) \ltimes {}^uG$ telle que $S_\lambda\pi_\lambda(x, h) = S_\lambda(x)\pi_\lambda(h)$, $x \in Mp(V)$, $h \in {}^uG$. On désigne également par $S_\lambda\pi_\lambda$ la représentation du groupe $\tilde{G} = \tilde{S} \ltimes {}^uG$ définie par $S_\lambda\pi_\lambda(xh) = S_\lambda \circ \text{Ad}_V(x)\pi_\lambda(h)$, $x \in \tilde{S}$, $h \in {}^uG$.

Soit χ_g le caractère de S^V défini au (2) de la proposition (6.2). On prolonge sa restriction à $\tilde{S}$ en un caractère de $\tilde{G}$ trivial sur uG . Alors, la représentation $\chi_g \otimes S_\lambda\pi_\lambda$ passe au quotient en une représentation de G notée π_g (ou π_g^G si l'on tient à préciser).

Proposition 6.4. L'application $\nu \mapsto \pi_{g_\nu}^G$ est une bijection de l'ensemble des $\nu \in \mathfrak{s}^*$ tels que $i(\nu + \rho)$ soit la différentielle d'un caractère de S sur l'ensemble des classes d'équivalence de séries discrètes de G dont la restriction à Z est un multiple du caractère de différentielle $i\lambda$.

Preuve. Ceci résulte de la proposition (5.1) et de [8, ch 5, lemme 3]. ■

7. Réalisation de Fock de la représentation métaplectique et paramétrisation d'Auslander-Kostant des représentations π_g

On garde les notations précédentes et on se donne $g \in \mathcal{E}$ une forme linéaire admissible. On rappelle que ℓ est un lagrangien totalement complexe positif (pour $B = B_g$) et S -invariant dans $V^{\mathbb{C}}$. Étant donné $X \in V$, il existe un unique élément $v_X \in \ell$ tel que $X = v_X + \overline{v_X}$. Alors $X \mapsto \overline{v_X}$ est un isomorphisme $\mathbb{R}$ -linéaire et S -équivariant de V sur $\bar{\ell}$. On l'utilise pour transporter la structure complexe et le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\bar{\ell}$, défini par $\langle v, w \rangle = iB(\bar{v}, w)$, sur V . Le groupe $U(\bar{\ell})$ s'identifie alors au groupe unitaire $U(V)$. Dans ces conditions, on peut réaliser la représentation π_λ dans l'espace

$$\mathcal{H}_\lambda = \{f : V \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe, } \int_V |f(z)|^2 e^{-\langle z, z \rangle} dz < +\infty\},$$

la représentation π_λ étant caractérisée par le fait que son caractère central est de différentielle $i\lambda$ et qu'elle vérifie :

$$(\pi_\lambda(\exp z_0)f)(z) = e^{-\frac{1}{2}\langle z_0, z_0 \rangle} e^{\langle z, z_0 \rangle} f(z - z_0), \quad z_0, z \in V, f \in \mathcal{H}_\lambda. \quad [3]$$

Désignons par S'_λ (ou S''_λ) la représentation de $U(\ell)$ définie par

$$(S'_\lambda(x)f)(z) = f(x^{-1}.z), \quad x \in U(\ell), z \in V, f \in \mathcal{H}_\lambda.$$

Dans ces conditions, la restriction de la représentation métaplectique S_λ à $\tilde{U}(\ell)$ est donnée par

$$S_\lambda(x, u) = \bar{u} S'_\lambda(x), \quad (x, u) \in \tilde{U}(\ell).$$

On vérifie que la formule $S'_\lambda \pi_\lambda(x, h) = S'_\lambda(\text{Ad}_V x) \pi_\lambda(h)$, $x \in S$, $h \in {}^u G$ définit une représentation de G .

Le caractère ξ_g de S se relève en un caractère de G trivial sur son radical unipotent, encore noté ξ_g . Il est alors immédiat que pour tout $x \in S$ et (x, u) relevant x on a

$$\xi_g \otimes S'_\lambda(\text{Ad}_V x) = \chi_g \otimes S_\lambda(\tilde{\text{Ad}}_V(x, u)).$$

On en déduit que la représentation π_g peut s'écrire: $\pi_g = \xi_g \otimes S'_\lambda \pi_\lambda$.

Si l'on pose $\kappa_{g+\rho} = \xi_g \otimes S'_\lambda \pi_\lambda$, on obtient une autre paramétrisation des séries discrètes de G par les orbites coadjointes. Il s'agit de la paramétrisation d'Auslander-Kostant [2]. On passe d'une paramétrisation à l'autre par une translation de ρ : on a $\kappa_{g+\rho} = \pi_g$ tandis que $\Omega_{g+\rho} = \rho + \Omega_g$.

Soit $e_1, \dots, e_m$ une base orthonormée de l'espace vectoriel complexe V (voir section 7) constituée de vecteurs propres pour S . On désigne par $z_1, \dots, z_m$ les fonctions coordonnées correspondantes et par $-\delta_1, \dots, -\delta_m \in \mathfrak{s}^*$ les caractères infinitésimaux associés. Cela signifie que

$$\text{Ad}_V(\exp \xi).e_j = e^{-i\delta_j(\xi)} e_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^m$, on pose

$$f_\alpha(z) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} (\alpha!)^{-\frac{1}{2}} z^\alpha.$$

Alors $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^m}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}_\lambda$ et chaque f_α est un vecteur propre pour $(S'_\lambda)_{|S}$ de poids infinitésimal $\sum_{j=1}^m \alpha_j \delta_j$. Soit $g \in \mathcal{E}$. Nous allons exprimer la forme de Liouville de l'orbite Ω_g^G dans le système de coordonnées global $X \mapsto g_X$ en fonction des formes différentielles dz_j , $1 \leq j \leq m$. Tout d'abord, si $X, X' \in V$, on a $B(X, X') = 2\operatorname{Re}B(v_X, \overline{v_{X'}}) = 2\operatorname{Im}\langle X, X' \rangle$, de sorte que $B = \frac{1}{i} \sum_{1 \leq j \leq m} dz_j \wedge d\bar{z}_j$. On désigne par ω (ou ω_V) la deux-forme symplectique sur V définie par $\omega = \frac{1}{i} \sum_{1 \leq j \leq m} dz_j \wedge d\bar{z}_j$.

Le résultat suivant est alors immédiat :

Lemme 7.1. *Soit $g \in \mathcal{E}$. La forme de Liouville ω_g sur l'orbite Ω_g est donnée dans le système de coordonnées $g_\bullet : X \mapsto g_X$ par la relation suivante : $g_\bullet^*(\omega_g) = \omega$.*

On garde les notations des sections précédentes. Nous allons ramener la démonstration du théorème 2.2 au cas où G et H ont un facteur réductif en commun, i.e. $G = H^u G$, et où ${}^u H$ est un groupe de Heisenberg.

8. On se ramène au cas où ${}^u H$ est un groupe de Heisenberg.

On reprend les notations du numéro 4

Proposition 8.1. 1. *Soit $g \in \mathcal{E}$. Si ${}^u H_0 \neq \{1\}$, la projection $p_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}} : \Omega_g \rightarrow \mathfrak{h}^*$ n'est pas propre sur l'image.*

2 *Soit $g \in \mathcal{E}$ une forme linéaire admissible pour G . Si ${}^u H_0 \neq \{1\}$, la série discrète π_g^G n'est pas H -admissible.*

Preuve. 1. Avec les notations de la proposition (5.1), pour tout $X \in W_0 = {}^u \mathfrak{h}_0$, on a

$$p_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}(g_X) = p_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}(g).$$

2. Supposons que la série discrète π_g^G soit H -admissible. On sait alors que les représentations unitaires irréductibles de H qui apparaissent dans $(\pi_g^G)_{|H}$ sont des séries discrètes modulo Z (voir [32], [18]). Par le corollaire (4.3), il s'ensuit que ${}^u H_0 = \{1\}$. ■

On voit donc que l'on peut supposer que ${}^u H$ est un groupe de Heisenberg, ce que nous faisons désormais.

9. On se ramène au cas où $G = H^u G$

Posons $G_1 = H^u G$ qui est un sous-groupe algébrique connexe de G et soit $\mathfrak{g}_1$ son algèbre de Lie. C'est un sous-groupe invariant de G , et soit R un sous-groupe compact maximal de H (c'est aussi un sous-groupe compact maximal pour G_1). Notons $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des formes linéaire sur $\mathfrak{g}_1$ non nulles sur $\mathfrak{z}$ et nulles sur V .

Proposition 9.1. 1. *Soient $g \in \mathcal{E}$ et $g_1 = g_{| \mathfrak{g}_1}$. Alors,*

a . *la G_1 -orbite $\Omega_{g_1}^{G_1}$ est G -invariante et $p_{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1}$ induit un difféomorphisme symplectique G -équivariant de Ω_g^G sur $\Omega_{g_1}^{G_1}$,*

b. $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(\Omega_g^G) = p_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}}(\Omega_{g_1}^{G_1})$ et les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ est propre de Ω_g^G sur son image,
- (ii) $p_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}}$ est propre de $\Omega_{g_1}^{G_1}$ sur son image.

2. On a $\mathcal{E}_1 = \{g|_{\mathfrak{g}_1}, g \in \mathcal{E}\}$. Soit $g_1 \in \mathcal{E}_1$ un élément admissible pour G_1 . Alors

- a. il existe $g \in \mathcal{E}$ admissible pour G tel que $g|_{\mathfrak{g}_1} = g_1$,
- b. si $g \in \mathcal{E}$ est admissible pour G et tel que $g|_{\mathfrak{g}_1} = g_1$, alors $(\pi_g^G)|_{G_1} = \pi_{g_1}^{G_1}$. En particulier, $(\pi_g^G)|_H = (\pi_{g_1}^{G_1})|_H$ et les assertions suivantes sont équivalentes:
 - (i) π_g^G est H -admissible,
 - (ii) $\pi_{g_1}^{G_1}$ est H -admissible.

Preuve. 1. D'après la deuxième assertion de la proposition (5.1), $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}_1}$ induit un difféomorphisme G -équivariant de Ω_g^G sur $\Omega_{g_1}^{G_1}$. Ainsi, $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}_1}(\Omega_g^G) = \Omega_{g_1}^{G_1}$ et on a

$$p_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}}(\Omega_{g_1}^{G_1}) = p_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}} \circ p_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}_1}(\Omega_g^G) = p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(\Omega_g^G).$$

Ce qui montre aussi que $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ est propre de Ω_g^G sur son image si et seulement si $p_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}}$ est propre de $\Omega_{g_1}^{G_1}$ sur son image.

2. Soit $g_1 \in \mathcal{E}_1$ une forme linéaire admissible pour G_1 . Soit χ un caractère de S^V dont la restriction à R^V est χ_{g_1} , et notons $i\nu$ sa différentielle. La forme $g = \nu + g_1|_{\mathfrak{g}} \in \mathcal{E}$ est admissible pour G par construction. De plus, on a clairement $\chi = \chi_g$. Alors

$$(\pi_g^G)|_{G_1} = (\chi_g \otimes S_\lambda \pi_\lambda)|_{R^u G} = \chi_{g_1} \otimes S_\lambda \pi_\lambda = \pi_{g_1}^{G_1},$$

où l'on a encore noté $S_\lambda \pi_\lambda$ la représentation du groupe $\tilde{G}_1 = \tilde{R} \ltimes {}^u G$ définie par

$$S_\lambda \pi_\lambda(xh) = S_\lambda \circ \widetilde{\text{Ad}}_V(x) \pi_\lambda(h), \quad x \in \tilde{R}, \quad h \in {}^u G. \quad \blacksquare$$

Cette proposition montre que l'on peut se ramener au cas où $G = H^u G$, c'est à dire au cas où $R = S$, ce que nous supposons désormais.

10. Démonstration des théorèmes (2.2) et (2.3)

On reprend les notations des sections précédentes. Nous allons démontrer dans cette section les théorèmes 2.2 et 2.3. Compte tenu des paragraphes 8, 9 et du lemme 3.1, on peut supposer que $R = S$ et que ${}^u H$ est un groupe de Heisenberg. En particulier on note W l'intersection de ${}^u \mathfrak{h}$ avec V . On voit que W est un sous-espace symplectique de V . Soient $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite fortement régulière et B la forme bilinéaire associée. On désigne par W^B le supplémentaire orthogonal de W dans V .

Soit S_0 le noyau dans S de Ad_{W^B} et $\mathfrak{s}_0$ son algèbre de Lie. Alors $S_1 = S/S_0$ est un tore dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}/\mathfrak{s}_0$ et le dual de cette dernière est

l'orthogonal $\mathfrak{s}_0^\perp$ de $\mathfrak{s}_0$ dans $\mathfrak{s}^*$. On rappelle que $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ désigne le cône d'intérieur non vide de $\mathfrak{s}_0^\perp$ engendré par $\Delta(\ell')$: $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} = \sum_{\delta \in \Delta(\ell')} \mathbb{R}_+ \delta$.

Preuve du Théorème 2.2. Dans ces conditions, dire que H vérifie la propriété $\mathcal{P}(\Omega)$ est équivalent à dire qu'il vérifie la propriété $\mathcal{P}_1(\Omega)$: l'ensemble des points fixes de S dans W^B est réduit à $\{0\}$ et il existe un lagrangien S -invariant positif de $(W^B)^\mathbb{C}$ pour lequel l'ensemble des poids infinitésimaux de S soit contenu dans un demi-espace ouvert de $\mathfrak{s}^*$.

1. Fixons $g \in \mathcal{E}$, ainsi qu'un lagrangien totalement complexe positif (relativement à la forme bilinéaire déduite de g) et S -invariant $\ell \subset V^\mathbb{C}$. Soit $\langle, \rangle$ la structure hermitienne sur V qui s'en déduit. On rappelle qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels réels $X \mapsto v_X$ de V sur ℓ tel que $X = v_X + \overline{v_X}$, qu'il est S -équivariant et que, pour $X, Y \in V$, on a $\langle X, Y \rangle = iB(v_X, \overline{v_Y})$. Il est immédiat que l'isomorphisme $X \mapsto v_X$ envoie W^B (resp. W) sur $\ell' = \ell \cap (W^B)^\mathbb{C}$ (resp. $\ell'' = \ell \cap W^\mathbb{C}$) qui est un lagrangien totalement complexe positif et S -invariant dans $(W^B)^\mathbb{C}$ (resp. $W^\mathbb{C}$).

Les sous-espaces W et W^B sont des sous-espaces hermitiens, symplectiques et orthogonaux, aussi bien pour la structure hermitienne que la structure symplectique de V , et les poids de S dans l'espace hermitien V (resp. W^B , W) sont les mêmes que les poids de S dans ℓ (resp. ℓ' , ℓ''). On désigne par $\Delta(\ell)$ (resp. $\Delta(\ell')$, $\Delta(\ell'')$) l'ensemble des poids infinitésimaux de S dans ℓ (resp. ℓ' , ℓ''). Les sous-espaces de poids correspondants sont deux à deux orthogonaux, à la fois pour la structure hermitienne et la structure symplectique. Si X est un vecteur de V et si $\delta \in \Delta(\ell)$, on note X_δ la composante de poids δ de X .

Un calcul simple montre que si $X \in V$ et $\xi \in \mathfrak{s}$, on a $B(X, \xi.X) = 2B(v_X, \xi.\overline{v_X})$. On en déduit que si X est un vecteur de poids δ , $B(X, \xi.X) = -2\langle X, X \rangle \delta(\xi)$.

Soient alors $X \in W^B$ et $Y \in W$. Ce que nous venons de voir montre que pour tout $\xi \in \mathfrak{s}$, on a

$$\begin{aligned} \Phi_{X+Y}(\xi) &= \sum_{\delta \in \Delta(\ell')} B(X_\delta + Y_\delta, \xi.(X_\delta + Y_\delta)) + \sum_{\delta \in \Delta(\ell'') \setminus \Delta(\ell')} B(Y_\delta, \xi.Y_\delta) \\ &= -2 \sum_{\delta \in \Delta(\ell')} (\langle X_\delta, X_\delta \rangle + \langle Y_\delta, Y_\delta \rangle) \delta(\xi) - 2 \sum_{\delta \in \Delta(\ell'') \setminus \Delta(\ell')} \langle Y_\delta, Y_\delta \rangle \delta(\xi). \end{aligned}$$

D'autre part, $W = {}^u\mathfrak{h} \cap V$, donc $B_{X+Y}|_{{}^u\mathfrak{h}} = B_Y$. On déduit de ceci que, pour tout $X \in W^B$ et $Y \in W$, on a

$$\begin{aligned} p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(g_{X+Y}) &= p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(g) + \sum_{\delta \in \Delta(\ell')} (\langle X_\delta, X_\delta \rangle + \langle Y_\delta, Y_\delta \rangle) \delta \\ &\quad + \sum_{\delta \in \Delta(\ell'') \setminus \Delta(\ell')} \langle Y_\delta, Y_\delta \rangle \delta - B_Y. \end{aligned} \quad (4)$$

Si on note W'_0 l'ensemble des points fixes de S dans W^B , alors pour tout $X \in W'_0$ on a

$$p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(g_X) = p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(g)$$

ce qui montre que l'ensemble $\{g_X, X \in W'_0\}$ (qui est difféomorphe à W'_0) est contenu dans $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}^{-1}(p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(g))$. Ceci montre que si $\Omega_g \subset \mathfrak{g}^*$ est une orbite fortement

régulière telle que $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} : \Omega_g \rightarrow \mathfrak{h}^*$ soit propre sur l'image, alors $W'_0 = \{0\}$. D'autre part, soit ℓ' un lagrangien S -invariant positif de $(W^B)^\mathbb{C}$ et supposons que l'ensemble des poids infinitésimaux $\Delta(\ell')$ de S ne soit contenu dans aucun demi-espace ouvert de $\mathfrak{s}^*$. Soient $\Delta_1(\ell')$ une partie maximale de $\Delta(\ell')$ contenue dans un demi-espace ouvert de $\mathfrak{s}^*$ et $\Delta_2(\ell') = \Delta(\ell') \setminus \Delta_1(\ell')$. Notons $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) le cône convexe engendré par $\Delta_1(\ell')$ (resp. $\Delta_2(\ell')$). Il est clair que $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ contient une droite $\mathbb{R}\delta_0$. Il existe donc un ensemble de réels positifs non tous nuls $\{\gamma_\delta, \delta \in \Delta(\ell')\}$ tel que $\delta_0 = \sum_{\delta \in \Delta_1(\ell')} \gamma_\delta \delta = - \sum_{\delta \in \Delta_2(\ell')} \gamma_\delta \delta$, soit encore

$$\sum_{\delta \in \Delta(\ell')} \gamma_\delta \delta = 0.$$

Soit $X_0 \in W^B$ tel que $\langle X_{0,\delta}, X_{0,\delta} \rangle = \gamma_\delta$ pour tout $\delta \in \Delta(\ell')$. D'après la relation (4), on a :

$$\{g_{tX_0}, t \in \mathbb{R}\} \subset p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}^{-1}(p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(g)),$$

ce qui montre que $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} : \Omega_g \rightarrow \mathfrak{h}^*$ n'est pas propre sur l'image, et on a bien l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii).

Soit C un compact de $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(\Omega_g) = \{p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(g_{X+Y}), X \in W^B, Y \in W\}$. Si $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(g_{X+Y}) \in C$ il suit de la relation (4) que Y est contenu dans un compact de W et par conséquent, $\sum_{\delta \in \Delta(\ell')} (\langle X_\delta, X_\delta \rangle + \langle Y_\delta, Y_\delta \rangle) \delta$ est contenu dans un compact C' de $\mathfrak{s}^*$. Si $\Delta(\ell')$ est contenu dans un demi-espace ouvert de $\mathfrak{s}^*$, alors il existe une forme linéaire φ sur $\mathfrak{s}^*$ telle que $\varphi(\delta) > 0$ pour tout $\delta \in \Delta(\ell')$ et l'on a

$$\sum_{\delta \in \Delta(\ell')} (\langle X_\delta, X_\delta \rangle + \langle Y_\delta, Y_\delta \rangle) \varphi(\delta) \subset \varphi(C') \subset [a, b],$$

où $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) en résulte facilement.

2. On se donne $g \in \mathcal{E}$ une forme linéaire admissible. Soient $\lambda = g|_{\mathfrak{z}}$ et $h = g|_{\mathfrak{h}}$. On désigne par ρ' (resp. ρ'') la forme linéaire sur $\mathfrak{s}$ définie par $i\rho'(\xi) = \frac{1}{2}\text{Tr ad}_{\ell'}\xi$ (resp. $i\rho''(\xi) = \frac{1}{2}\text{Tr ad}_{\ell''}\xi$), $\xi \in \mathfrak{s}$.

Soit $e_1, \dots, e_m$ une base orthonormée de l'espace vectoriel complexe V (voir section 7) constituée de vecteurs propres pour S et telle que $e_1, \dots, e_r$ (resp. $e_{r+1}, \dots, e_m$) soit une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel W^B (resp. W) (une telle base existe). On désigne par $\delta_1, \dots, \delta_m$ les poids infinitésimaux correspondants, de sorte que l'on a $\Delta(\ell') = \{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ et $\Delta(\ell'') = \{\delta_{r+1}, \dots, \delta_m\}$.

Considérons la sous-algèbre de Lie de Heisenberg ${}^u\mathfrak{h} = W^B \oplus \mathfrak{z}$ de ${}^u\mathfrak{g}$ et soit uK le sous-groupe algébrique connexe de G d'algèbre de Lie ${}^u\mathfrak{h}$ qui est un sous-groupe de Heisenberg de uG . L'application $(k, h) \mapsto kh$ est un morphisme surjectif de groupe de Lie de ${}^uK \times {}^uH$ sur uG dont le noyau est $\check{Z} = \{(z, z^{-1}) | z \in Z\}$. D'autre part les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda^{W^B} \hat{\otimes} \mathcal{H}_\lambda^W$ et $\mathcal{H}_\lambda^V$ sont canoniquement isomorphes tandis que la représentation $\pi_\lambda^{W^B} \otimes \pi_\lambda^W$ de ${}^uK \times {}^uH$ passe au quotient en la représentation π_λ^V de uG .

Le groupe $U(\ell')$ (resp. $U(\ell'')$) s'identifie naturellement au sous-groupe de $U(\ell)$

constitué des éléments qui agissent trivialement dans ℓ'' (resp. ℓ'). Les deux sous-groupes en question commutent et l'application $(x, y) \mapsto xy$ est un morphisme injectif de $U(\ell') \times U(\ell'')$ dans $U(\ell)$ permettant de l'identifier au sous-groupe $U(\ell')U(\ell'')$ de $U(\ell)$ laissant invariant ℓ' ou, de manière équivalente, ℓ'' . On vérifie facilement que, avec cette identification, on a

$$(S'^{\ell}_{\lambda})_{|U(\ell') \times U(\ell'')} = S'^{\ell'}_{\lambda} \otimes S'^{\ell''}_{\lambda}.$$

Le groupe S agit, via Ad_{W^B} , dans le groupe de Heisenberg uK par automorphismes laissant fixe point par point le centre. On peut donc considérer le produit semi-direct $K = S \ltimes {}^uK$, sous-groupe algébrique connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k} = \mathfrak{s} \oplus {}^u\mathfrak{k}$.

Soit $k \in \mathfrak{k}^*$ telle que $k|_{\mathfrak{z}} = \lambda$ et $k|_{\mathfrak{s} \oplus W^B} = 0$. Comme $0 = -\rho' + \rho'$ et $\rho = \rho' + \rho''$, on voit que la forme linéaire $k - \rho' \in \mathfrak{k}^*$ (resp. $h + \rho' \in \mathfrak{h}^*$) est admissible pour K (resp. admissible pour H) de sorte que l'on dispose des représentations $\pi_{k-\rho'}^K$ et $\pi_{h+\rho'}^H$. Soit $\check{G}$ le sous-groupe de $K \times H$ constitué des éléments de la forme $((x, y), (x, z))$ avec $x \in S$, $y \in {}^uK$ et $z \in {}^uH$. Alors l'application $((x, y), (x, z)) \mapsto (x, yz)$ est un morphisme surjectif de groupes de Lie de $\check{G}$ sur G de noyau $\check{Z}$. On vérifie que la restriction à $\check{G}$ de la représentation $\pi_{k-\rho'}^K \otimes \pi_{h+\rho'}^H$ du groupe $K \times H$ passe au quotient à G en la représentation π_g^G . Or, on a $\pi_{k-\rho'}^K = S'^{\ell'}_{\lambda} \pi_{\lambda}^{W^B}$. Il résulte de ces considérations que

$$(\pi_g^G)_{|H} = (S'^{\ell'}_{\lambda})_{|S} \otimes \pi_{h+\rho'}^H.$$

Il suit alors de la description de la restriction à S des représentations S'_{λ} donnée au numéro (7) que l'on a

$$(S'^{\ell'}_{\lambda})_{|S} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{S}} n_{\chi} \chi,$$

avec

$$n_{\chi} = \text{card}\{\alpha \in \mathbb{N}^r, \chi(\xi) \cdot f_{\alpha} = S'^{\ell'}_{\lambda}(\xi) f_{\alpha}\}.$$

Rappelons que chaque f_{α} est un vecteur propre pour $(S'^{\ell'}_{\lambda})_{|S}$ de poids infinitésimal $\sum_{j=1}^r \alpha_j \delta_j$ et qu'on a identifié le caractère χ avec la forme linéaire $-id\chi$. Avec ces considérations, on voit que

$$n_{\chi} = \text{card}\{\alpha \in \mathbb{N}^r, \chi = \sum_{j=1}^r \alpha_j \delta_j\} = m(\chi).$$

Il est alors immédiat que

$$(\pi_g^G)_{|H} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{S}} m(\chi) \pi_{h+\chi+\rho'}^H, \quad (5)$$

où χ désigne à la fois un élément de $\widehat{S}$ et le poids infinitésimal correspondant et où $m(\chi)$ a été défini par la relation (1).

Ainsi π_g^G est H -admissible si et seulement si $m(\chi) < +\infty$ ce qui est équivalent à ce que $\{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ sont tous non nuls (i.e. S n'a pas de point fixe dans

W^B) et contenus dans un même demi-espace ouvert. Ainsi, π_g^G est H -admissible si et seulement H vérifie la condition $\mathcal{P}_1(\Omega)$ d'où l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii). ■

Preuve du Théorème 2.3. Soit $f \in p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(\Omega_g^G)$. D'après la relation (4), il existe $X \in W^B$ et $Y \in W$ tels que

$$f = p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(g) + \sum_{\delta \in \Delta(\ell')} (\langle X_\delta, X_\delta \rangle + \langle Y_\delta, Y_\delta \rangle) \delta + \sum_{\delta \in \Delta(\ell'') \setminus \Delta(\ell')} \langle Y_\delta, Y_\delta \rangle \delta - B_Y.$$

Comme $f|_{\mathfrak{z}} = g|_{\mathfrak{z}} \neq \{0\}$, il suit de la première assertion du lemme 4.2 que f est fortement régulière. Comme $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(\Omega_g^G)$ est H -invariant, il suit de la deuxième assertion du lemme 4.2 qu'on peut supposer que $f|_W = 0$, ce qui est équivalent à $Y = 0$. Ainsi,

$$f = p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(g) + \sum_{\delta \in \Delta(\ell')} \langle X_\delta, X_\delta \rangle \delta.$$

D'où $H.f = \Omega_{h+\mu}^H$, avec $\mu = \sum_{\delta \in \Delta(\ell')} \langle X_\delta, X_\delta \rangle \delta$ parcourant $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$. L'assertion (i) en découle.

Montrons (ii). Si g est une forme linéaire admissible, il suit de ce qu'on a vu pour démontrer le deuxième point du théorème 2.2 que $h + \rho'$ est admissible pour H . Comme χ est un caractère de S , on voit que $h + \chi + \rho'$ est également admissible pour H . Réciproquement, soit Ω une H -orbite admissible contenue dans $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(\Omega_g^G)$. D'après (i), il existe $\mu \in C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ tel que $\Omega = \Omega_{h+\mu}^H$. Enfin, la dernière assertion est conséquence de ce que l'on a vu à la fin de la démonstration du théorème 2.2. ■

11. Volume des espaces réduits génériques

On garde les notations du paragraphe précédent. Soit $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite fortement régulière. Si $f \in p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(\Omega)$, on note $\tilde{X}_f$ l'image réciproque de f par $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ dans Ω , qui est une sous-variété algébrique (pas forcément lisse) $H(f)$ -invariante et on désigne par X_f l'espace quotient $H(f) \backslash \tilde{X}_f$. La variété $\tilde{X}_f$ s'appelle l'ensemble de niveau f dans Ω de l'application moment $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} : \Omega \rightarrow \mathfrak{h}^*$. C'est une variété lisse si f est une valeur régulière de l'application moment, i.e. si le rang de l'application moment est maximal en tout point de $\tilde{X}_f$. Lorsque c'est le cas, l'espace X_f s'appelle l'espace réduit au dessus de f de l'application moment. Il est immédiat que les variétés $\tilde{X}_f$ et $\tilde{X}_{f'}$, et donc les espaces réduits correspondants, sont isomorphes dès que f et f' sont situés dans la même H -orbite.

Dans notre situation, le groupe $H(f)/Z$ est un tore compact. Il s'ensuit que si f est une valeur régulière de l'application moment, la variété $\tilde{X}_f$ étant lisse, l'espace quotient X_f est un orbifold sur lequel la forme de Liouville de Ω induit une structure symplectique (voir par exemple [1, Chapitre III]). Si f est une valeur régulière de l'application moment, il en est de même pour tout f' situé dans $H.f$ et, dans ce cas, les espaces réduits sont des orbifolds symplectiquement difféomorphes.

Il est clair que $\mathfrak{s}_0^\perp$ est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{s}^*$ engendré par $\Delta(\ell')$. L'espace vectoriel W^B , muni de la deux-forme $\omega_{W^B} = \omega|_{W^B}$ est une variété symplectique sur lequel le tore S_1 opère par automorphismes symplectiques et

d'une manière hamiltonienne. On vérifie facilement que l'application quadratique $\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ de W^B dans $\mathfrak{s}_0^\perp$ définie par :

$$\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(X) = \sum_{\delta \in \Delta(\ell')} \langle X_\delta, X_\delta \rangle \delta, \quad X \in W^B$$

est l'application moment correspondante.

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties σ de $\{1, \dots, r\}$ telles que $(\delta_j)_{j \in \sigma}$ forme une base de $\mathfrak{s}_0^\perp$. Si $\sigma \subset \{1, \dots, r\}$, on note C_σ le sous-cône fermé de $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ engendré par $(\delta_j)_{j \in \sigma}$. Alors d'après le théorème de Caratheodory [6], $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{B}} C_\sigma$. Si $\mu \in C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$, on lui associe l'intersection des C_σ , $\sigma \in \mathcal{B}$ qui le contiennent. Ceci définit une subdivision de $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ en cônes polyédraux. Les intérieurs des cônes maximaux de cette subdivision sont ce que l'on appelle les *chambres* de $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$. Elles sont deux à deux disjointes et si $\mu \in C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$, il existe une chambre C telle que $\mu \in \overline{C}$ [4]. On désigne par $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}^{reg}$ la réunion des chambres de $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$.

L'image de l'application moment $\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ est le cône $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$. Il est clair que $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}^{reg}$ est le sous-ensemble de $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ constitué des éléments qui ne sont contenus dans aucun cône engendré par une partie de $\Delta(\ell')$ qui soit de rang strictement inférieur à la dimension de $\mathfrak{s}_0^\perp$.

Proposition 11.1. *Soient $g \in \mathcal{E}$, $h = p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(g)$, $f \in p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(\Omega_g^G)$ et μ l'unique élément de $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ tel que $f \in \Omega_{h+\mu}^H$.*

1. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *f est une valeur régulière de l'application moment $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} : \Omega_g^G \rightarrow \mathfrak{h}^*$,*
- (ii) *$\mu \in C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}^{reg}$,*
- (iii) *μ est une valeur régulière de l'application moment $\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$.*

2. *Soit $\mu \in C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}^{reg}$. Alors*

- (i) *l'ensemble de niveau μ , $\tilde{X}_\mu = \Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}^{-1}(\mu)$ est une sous-variété régulière de W^B ,*
- (ii) *l'application $g_\bullet : X \mapsto g_X$ induit un difféomorphisme S_1 -équivariant de l'ensemble $\tilde{X}_\mu$ sur l'ensemble $\tilde{X}_{h+\mu}$,*
- (iii) *l'application $g_\bullet : X \mapsto g_X$ passe au quotient en un symplectomorphisme d'orbifolds de $X_\mu = S_1 \backslash \tilde{X}_\mu$ sur $X_{h+\mu}$.*

Preuve. 1. Soit $X \in \Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}^{-1}(\mu)$. D'après le théorème de Caratheodory [6], $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ est la réunion des quadrants positifs C_σ , $\sigma \in \mathcal{B}$. Ainsi, $\mu \in C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}^{reg}$ si et seulement si, pour toute partie $\sigma \in \mathcal{B}$ telle que $\mu \in C_\sigma$, on a $X_\delta \neq 0$ ($\delta \in (\delta_j)_{j \in \sigma}$). Soit $Y \in W^B$, on a

$$[d\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(X)](Y) = 2 \sum_{\delta \in \Delta(\ell')} \langle X_\delta, Y_\delta \rangle \delta,$$

et on voit que $\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} : W^B \rightarrow \mathfrak{s}_0^\perp$ est une submersion en X et donc μ est une valeur régulière de $\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ si et seulement si l'ensemble des δ tels que $X_\delta \neq 0$ contient une base de $\mathfrak{s}_0^\perp$. Ceci montre l'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Montrons que (i) et (iii) sont équivalentes. On sait que si f est une valeur régulière de l'application moment, il en est de même pour tout $f' \in H.f$. On peut donc supposer que $f = h + \mu \in \mathfrak{h}^*$ où h est un élément de $p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(\mathcal{E})$.

Soit g l'élément de $\mathcal{E}$ tel que $g|_{\mathfrak{h}} = h$. L'espace V est diffeomorphe à l'orbite Ω_g^G par l'application $X \mapsto g_X$. On déduit de (4) que si $X \in W^B$, $Y \in W$ sont tels que $X + Y \in (p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} \circ g_{\bullet})^{-1}(f)$, alors $Y = 0$ et $\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(X) = \mu$. De plus, on a $\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}^{-1}(\mu) = (p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} \circ g_{\bullet})^{-1}(f)$. L'équivalence est donc immédiate puisque

$$(p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} \circ g_{\bullet})|_{W^B} = p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(g) + \Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}.$$

2. Conséquence directe de la première assertion. ■

Supposons que les groupes G et H vérifient les conditions équivalentes du théorème (2.2). Ceci est aussi équivalent au fait que les espaces réduits sont compacts et nous allons donner une expression pour leur volume. Compte tenu de la proposition (11.1), ceci se ramène au calcul du volume des espaces réduits pour l'application moment $\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$. Remarquons que les conditions équivalentes du théorème (2.2) se traduisent aussi par le fait que le cône $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ est strictement convexe.

En utilisant la base orthonormée $e_1, \dots, e_r$ de W^B constituée de vecteurs propres pour S de poids infinitésimaux respectifs $\delta_1, \dots, \delta_r$ et en remplaçant S par son quotient S_1 , on se ramène à étudier la situation suivante.

On considère $V = \mathbb{C}^r$, $e_1, \dots, e_r$ sa base canonique et $z_1, \dots, z_r$ le système de coordonnées correspondant. On munit V de la structure hermitienne canonique $\langle, \rangle$ et de la deux forme symplectique $\omega = \frac{1}{i} \sum_{1 \leq j \leq r} dz_j \wedge d\bar{z}_j$. Soit alors T le tore maximal de $U(V)$ constitué des transformations unitaires dont la matrice dans la base $e_1, \dots, e_r$ est diagonale et soit $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie. On se donne un tore $S \subset T$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{t}$. Soit $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ les poids infinitésimaux respectifs des vecteurs $e_1, \dots, e_r$ pour T . Ils forment une base de l'espace dual $\mathfrak{t}^*$ et les poids infinitésimaux respectifs des vecteurs $e_1, \dots, e_r$ pour S sont les $\delta_j = p_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}(\gamma_j)$, $1 \leq j \leq r$. On désigne leur ensemble par $\Delta(S)$. Si $\delta \in \Delta(S)$, on note V^δ le sous-espace de poids δ pour S et si $z \in V$, on note z_δ sa composante dans V^δ . Le tore S agit dans V d'une manière hamiltonienne en conservant la structure symplectique et on vérifie que l'application moment correspondante est donnée par:

$$\Phi_S = \sum_{1 \leq j \leq r} |z_j|^2 \delta_j = \sum_{\delta \in \Delta(S)} \langle z_\delta, z_\delta \rangle \delta.$$

En particulier, on a

$$\Phi_T = \sum_{1 \leq j \leq r} |z_j|^2 \gamma_j.$$

L'image de Φ_S est le cône $C_S = \sum_{\delta \in \Delta(S)} \mathbb{R}_+ \delta$ et celle de Φ_T est le cône convexe strict $C_T = \sum_{1 \leq j \leq r} \mathbb{R}_+ \gamma_j$.

On note C_S^{reg} le sous-ensemble de C_S constitué des éléments qui ne sont contenus dans aucun cône engendré par une partie de $\Delta(S)$ qui soit de rang strictement inférieur à la dimension de $\mathfrak{s}$. Notons que cette définition est compatible avec la définition de $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}^{reg}$ donnée plus haut.

On suppose S tel que les éléments de $\Delta(S)$ soient tous situés dans un même demi-espace ouvert, ou de manière équivalente, que C_S soit un cône convexe strict.

On munit les tores S et T des mesures de Haar normalisées, leurs algèbres de Lie respectives de la mesure de Lebesgue tangente et les espaces duaux de ces dernières de la mesure de Lebesgue duale. Les mesures de Lebesgue ainsi données sur $\mathfrak{s}^*$ et $\mathfrak{t}^*$ induisent une mesure de Lebesgue sur $\ker p_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}$ ainsi que sur tout sous-espace affine de $\mathfrak{t}^*$ de direction ce sous-espace vectoriel.

Soit $\mu \in C_S$. Alors $\mathcal{P}_\mu = p_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}^{-1}(\mu) \cap C_T$ est un polytope convexe compact contenu dans le sous-espace affine $p_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}^{-1}(\mu)$ de direction $\ker p_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}}$. On note $\text{vol}(P_\mu)$ son volume.

Si X est un orbifold symplectique compact de dimension $2n$ dont la forme symplectique est notée ω_X , on note $\text{vol}(X)$ son volume symplectique qui est donné par:

$$\text{vol}(X) = \int_X \frac{1}{2\pi n!} \wedge^n \omega_X.$$

Comme précédemment, si $\mu \in \mathfrak{s}^*$, on désigne par $\tilde{X}_\mu$ l'ensemble de niveau $\Phi_S^{-1}(\mu)$ et, si μ est une valeur régulière de l'application moment Φ_S , par X_μ l'espace réduit $S \setminus \tilde{X}_\mu$. Le fait que μ soit une valeur régulière de l'application moment Φ_S est équivalent au fait que $\mu \in C_S^{\text{reg}}$. D'autre part, on a $\mathcal{P}_\mu = \Phi_T(\tilde{X}_\mu)$.

Le résultat suivant, énoncé dans [16, Theorem 3.4] dont la démonstration renvoie à [14], est une conséquence de [13, Proposition 3.2].

Théorème 11.2. *Soit $\mu \in C_S^{\text{reg}}$. Alors, on a $\text{vol}(X_\mu) = \text{vo}(\mathcal{P}_\mu)$.*

Preuve. D'après [13, proposition 3.2], l'image directe par l'application moment Φ_S de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^r$ est la mesure de Duistermaat-Heckman. Elle est de la forme $f(\mu)d_{\mathfrak{s}^*}\mu$ où f est une fonction localement intégrable supportée par l'image de Φ_S et telle que pour toute valeur μ régulière pour Φ_S , $f(\mu) = \text{vol}(X_\mu)$. Appliquant ce résultat à S et à T et écrivant que $\Phi_S = p_{\mathfrak{t},\mathfrak{s}} \circ \Phi_T$, on en déduit le résultat désiré. ■

12. Formule pour les multiplicités

Dans ce paragraphe, on suppose que les groupes G et H vérifient les conditions équivalentes du théorème (2.2). D'après le théorème (2.3), la restriction de la série discrète π_g^G ($g \in \mathcal{E}$) à H se désintègre en somme directe hilbertienne de séries discrètes $\pi_{h+\chi+\rho'}^H$ de H ($h = p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(g)$), chacune intervenant avec la multiplicité finie $m(\chi)$ qui est le cardinal de l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{N}^r$ qui sont solution de $\sum_{1 \leq j \leq r} \alpha_j \delta_j = \chi$. Nous allons donner une formule pour ces multiplicités en utilisant une formule d'Euler-MacLaurin pour les fonctions de partition introduite par Brion-Vergne [4] et [5] dont nous rappelons les détails. Si $\sigma \in \mathcal{B}$, on note $S_\sigma = \cap_{j \in \sigma} \ker \delta_j$, que l'on voit comme sous-groupe fini de R_1 , et on pose $F_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} = \cup_{\sigma \in \mathcal{B}} S_\sigma$.

Pour $u \in \mathfrak{t}^*$, $\partial(u)$ désigne l'opérateur différentiel d'ordre 1 sur $\mathfrak{t}^*$ de dérivation selon le vecteur u : $\partial(u)\varphi(x) = \frac{d}{dt}\varphi(x + tu)|_{t=0}$.

Pour $a \in \mathbb{C}$, on considère la fonction développable en série entière au voisinage de 0

$$\widehat{A}(a, z) := \frac{z}{e^{\frac{z}{2}} - ae^{-\frac{z}{2}}} = \sum_{k=0}^{\infty} c(a, k) z^k.$$

Pour $a \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathfrak{r}^*$, on définit l'opérateur $\widehat{A}(a, (\partial(u)))$ par la formule

$$\widehat{A}(a, \partial(u)) = \frac{\partial(u)}{e^{\frac{1}{2}\partial(u)} - ae^{-\frac{1}{2}\partial(u)}} = \sum_{k=0}^{\infty} c(a, k) \partial(u)^k.$$

C'est un opérateur différentiel d'ordre infini agissant sur l'espace des fonctions polynômes sur $\mathfrak{r}^*$. Pour $t \in R_1$, on définit sur $\mathfrak{r}^*$ l'opérateur différentiel d'ordre infini $\widehat{A}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}$ en posant

$$\widehat{A}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}(t) = \prod_{j=1}^r \widehat{A}(\delta_j(t)^{-1}, \partial(\delta_j)). \quad (6)$$

Soit $\mu \in C_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}$, alors les *chambres* de $C_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}$ associées sont deux à deux disjointes et il existe une chambre C telle que $\mu \in \overline{C}$. De plus, $C_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}^{reg}$ est la réunion des chambres de $C_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}$.

Si $\mu \in C_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}^{reg}$, on note $\mathcal{V}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}(\mu)$ le volume de l'espace réduit (orbifold symplectique) $X_{h+\mu}$ (ce volume ne dépend pas de $g \in \mathcal{E}$).

Théorème 12.1. 1. Soit C une chambre de $C_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}$. Alors l'application $C \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu \mapsto \mathcal{V}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}(\mu)$ se prolonge en une fonction polynomiale $\mathcal{V}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, C}$ sur $\mathfrak{r}_0^\perp$.

2. Soit $g \in \mathcal{E}$ une forme linéaire admissible et $h = g|_{\mathfrak{h}}$. Soit ℓ' un lagrangien R -invariant positif de $((\mathfrak{h}/\mathfrak{z})^B)^\mathbb{C}$ et soit ρ' la forme linéaire sur $\mathfrak{r}$ telle que $i\rho' = \frac{1}{2}\text{Tr ad}_{\ell'}$. Soient $\chi \in \widehat{R}$ tel que $\chi \in C_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}$ et C une chambre de $C_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}$ telle que $\chi \in \overline{C}$. Alors la multiplicité $m(\chi)$ de la représentation $\pi_{h+\chi+\rho'}^H$ dans la restriction de la série discrète π_g^G à H est donnée par

$$m(\chi) = \sum_{t \in F_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}} \chi(t) \widehat{A}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}(t) \mathcal{V}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, C}(\chi + \rho'). \quad (7)$$

Preuve. 1. Ce résultat est énoncé dans [4, proposition1] pour $\mu \mapsto \text{vol}(\mathcal{P}_\mu)$. Compte tenu du théorème 11.2 et de l'assertion (2 – iii) de la proposition 11.1 le résultat est immédiat.

2. Ceci résulte des formules (1), (5) et du paragraphe 3.5 de [5, corollaire1] faisant intervenir le genre *Todd* avec $\text{Todd}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}(t) = \widehat{A}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}(t) e^{\partial_{\rho'}}$. ■

Remarque 12.2. Utilisant la paramétrisation d'Auslander-Kostant [2] pour la réalisation des séries discrètes de G , on peut donner une formule, pour les multiplicités des séries discrètes qui interviennent dans la restriction à H , similaire à (7) et faisant intervenir le genre *Todd*.

Remerciements: Je tiens à remercier le Professeur Michel Duflo pour ses précieux conseils suite aux discussions que j'ai eu avec lui et qui m'ont permis d'achever ce travail ainsi que le rapporteur pour ses suggestions qui ont amélioré cet article.

Références

- [1] Audin, M., *Torus actions on symplectic manifolds*, revised éd., Progress in Mathematics **93**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
- [2] Auslander, L., and B. Kostant, *Polarization and unitary representations of solvable Lie groups*, Invent. Math. **14** (1971), 255–354.
- [3] Bernat, P., N. Conze, M. Duflo, M. Lévy-Nahas, M. Raïs, P. Renouard et M. Vergne, «Représentations des groupes de Lie résolubles,» Dunod, Paris, 1972, Monographies de la Société Mathématique de France **4**.
- [4] Brion, M. et M. Vergne, *Une formule d'Euler-Maclaurin pour les fonctions de partition*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996), 217–220.
- [5] —, *Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), 797–833.
- [6] De Concini, C., and C. Procesi, “Topics in hyperplane arrangements, polytopes and box-splines,” Universitext, Springer, New York, 2011.
- [7] Dixmier, J., *Algèbres enveloppantes*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars. Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996, Reprint of the 1974 original.
- [8] Duflo, M., *Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie*, in: Harmonic analysis and group representations, Liguori, Naples, 1982, 129–221.
- [9] —, *Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques*, Acta Math. **149** (1982), 153–213.
- [10] —, *On the Plancherel formula for almost algebraic real Lie groups*, in: Lie group representations III, (College Park, Md., 1982/1983), Lecture Notes in Math **1077**, Springer, Berlin, 1984, 101–165.
- [11] Duflo, M. et M. Vergne, *Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **268** (1969), A583–A585.
- [12] Duistermaat, H., V. Guillemin, E. Meinrenken, and S. Wu, *Symplectic reduction and Riemann-Roch for circle actions*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 259–266.
- [13] Duistermaat, J. J., G. J. Heckman, *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space*, Invent. Math. **69** (1982), 259–268.
- [14] Guillemin, V., *Kähler structures on toric varieties*, J. Differential Geom. **40** (1994), 285–309.
- [15] —, *Reduced phase spaces and Riemann-Roch*, in: Lie theory and geometry, Progr. Math. **123**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994, 305–334.

- [16] —, *Riemann-Roch for toric orbifolds*, J. Differential Geom. **45** (1997), 53–73.
- [17] Jeffrey, L. C., and F. C. Kirwan, *Localization and the quantization conjecture*, Topology **36** (1997), 647–693.
- [18] Kouki, S., *La conjecture de Duflo pour les groupes résolubles exponentiels*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **348** (2010), 735–738.
- [19] Lion, G., and M. Vergne, “The Weil representation, Maslov index and theta series,” Progress in Mathematics **6**, Birkhäuser Boston, Mass., 1980.
- [20] Liu, G., *Sur la notion “faiblement propre” dans la conjecture de Duflo*, J. Funct. Anal. **264** (2013), 403–412.
- [21] E. Meinrenken, *On Riemann-Roch formulas for multiplicities*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 373–389.
- [22] —, *Symplectic surgery and the Spin^c -Dirac operator*, Adv. Math. **134** (1998), 240–277.
- [23] Meinrenken, E., and R. Sjamaar, *Singular reduction and quantization*, Topology **38** (1999), 699–762.
- [24] Paradan, P.-É., *Localization of the Riemann-Roch character*, J. Funct. Anal. **187** (2001), 442–509.
- [25] —, *Spin^c -quantization and the K -multiplicities of the discrete series*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **36** (2003), 805–845.
- [26] Shale, D., *Linear symmetries of free boson fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 149–167.
- [27] Tian, Y., W. Zhang, *An analytic proof of the geometric quantization conjecture of Guillemin-Sternberg*, Invent. Math. **132** (1998), 229–259.
- [28] —, *Holomorphic Morse inequalities in singular reduction*, Math. Res. Lett. **5** (1998), no. 3, p. 345–352.
- [29] —, *Symplectic reduction and a weighted multiplicity formula for twisted Spin^c -Dirac operators*, Asian J. Math. **2** (1998), 591–607.
- [30] —, *Quantization formula for symplectic manifolds with boundary*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), 596–640.
- [31] Torasso, P., *Sur le caractère de la représentation de Shale-Weil de $\text{Mp}(n, \mathbf{R})$ et $\text{Sp}(n, \mathbf{C})$* , Math. Ann. **252** (1980), 53–86.
- [32] Vargas, J., *Restrictions of some unitary representations of $\text{SU}(n, 1)$ to $\text{U}(n - 1, 1)$* , J. Funct. Anal. **103** (1992), 352–371.
- [33] Vergne, M., *Multiplicities formula for geometric quantization. I, II*, Duke Math. J. **82** (1996), 143–179, 181–194.

- [34] Zhang, W, *Holomorphic quantization formula in singular reduction*, Commun. Contemp. Math. **1** (1999), 281–293.
- [35] —, *Symplectic reduction and family quantization*, Internat. Math. Res. Notices **19** (1999), 1043–1056.

Sami Kouki
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Tunis
Campus universitaire
1060 Tunis, Tunisie
sami.kouki@math.univ-poitiers.fr

Received January 28, 2013
and in final form January 30, 2014