

Sur les champs de vecteurs invariants sur l'espace tangent d'un espace symétrique réductif

Abderrazak Bouaziz et Nouri Kamoun

Communicated by J. Faraut

Abstract. Let G be a real reductive and connected Lie group and σ an involution of G . Let H denote the identity component of the group of fixed points of σ , $\mathfrak{g}$ the Lie algebra of G and $\mathfrak{q}$ the -1 eigenspace of σ in $\mathfrak{g}$. The group H acts naturally on $\mathfrak{q}$ via the adjoint representation. Let $C^\infty(\mathfrak{q})^H$ denote the algebra of H -invariant smooth functions on $\mathfrak{q}$, and $\mathfrak{X}(\mathfrak{q})^H$ the space of H -invariant smooth vector fields on $\mathfrak{q}$. Any vector field $X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{q})^H$ defines naturally a derivation D_X of the algebra $C^\infty(\mathfrak{q})^H$. We prove that the image of the map $X \mapsto D_X$ is the set of derivations of the algebra $C^\infty(\mathfrak{q})^H$ preserving the ideal $\Phi C^\infty(\mathfrak{q})^H$ of $C^\infty(\mathfrak{q})^H$, where Φ is a discriminant function on $\mathfrak{q}$.

Mathematics Subject Classification 2010: 17B20, 22F30, 22E30.

Key Words and Phrases: Lie Group, symmetric space, invariant vector field, Taylor expansion.

1. Introduction

Soit K un groupe de Lie opérant différenciablement dans une variété différentiable X . Tout champ de vecteurs lisse et K -invariant sur X définit naturellement une dérivation de l'algèbre $C^\infty(X)^K$ des fonctions lisses et K -invariantes sur X , mais on n'obtient pas ainsi toutes les dérivations de cette algèbre. Par exemple ([13], exemple 2.6) pour $X = \mathbb{R}$ et $K = \{\pm \text{id}_{\mathbb{R}}\}$, les fonctions invariantes par K sont les fonctions paires, et si $f \in C^\infty(\mathbb{R})^K$, il existe une fonction lisse g sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; la dérivation D de $C^\infty(\mathbb{R})^K$ définie par $Df(x) = \frac{d}{dx}g(x^2)$ ne provient pas d'un champ de vecteurs lisse K -invariant sur $\mathbb{R}$.

Lorsque K est compact, G. Schwarz a donné une caractérisation des dérivations de $C^\infty(X)^K$ qui proviennent de champs de vecteurs K -invariants sur X ([13], théorème 0.2): ce sont les dérivations qui préservent les idéaux de fonctions qui s'annulent sur les strates de X (si L est un sous-groupe de K , l'ensemble des éléments de X dont le fixateur dans K est conjugué à L est appelé une strate de X). Dans ([13], remarque 6.16) il est dit qu'on pourrait formuler et essayer de démontrer des résultats analogues pour l'action de groupes réductifs réels. Nous nous proposons d'étudier le cas des groupes d'isotropie des espaces symétriques

réductifs agissant sur les espaces tangents. Pour cela, nous nous inspirons de la formulation de M. Raïs pour les espaces symétriques riemanniens.

Supposons que K (toujours compact) soit le groupe d'isotropie d'un espace symétrique riemannien opérant (linéairement) sur l'espace tangent $\mathfrak{p}$ de cet espace symétrique, et soient $(P_1, \dots, P_\ell)$ un système minimal de générateurs homogènes de l'algèbre des polynômes K -invariants sur $\mathfrak{p}$. On note ∇P_i le gradient de P_i relativement à la structure riemannienne B de $\mathfrak{p}$, et on pose $\Phi = \det(B(\nabla p_i, \nabla p_j))$. Dans cette situation, M. Raïs a montré ([10], lemme 3.4) que les dérivations de $C^\infty(\mathfrak{p})^K$ qui proviennent de champs de vecteurs invariants sont celles qui préservent l'idéal engendré par Φ , et que toute dérivation de ce type est induite par un champ de vecteurs de la forme $\sum_{i=1}^\ell \varphi_i \nabla P_i$, avec $\varphi_i \in C^\infty(\mathfrak{p})^K$.

L'objectif de cet article est de montrer que la formulation de Raïs se généralise aux espaces symétriques réductifs quelconques. L'idée de la preuve est la même que la sienne, cependant notre situation présente deux difficultés supplémentaires: l'existence de plusieurs classes de conjugaison de sous-espaces de Cartan, et, surtout, l'ensemble des restrictions à un sous-espace de Cartan des fonctions invariantes n'est pas l'ensemble des fonctions invariantes par un groupe. Cela nous oblige à travailler avec les développements de Taylor des fonctions invariantes qui eux présentent de bonnes propriétés d'invariance ([5] et [6]).

Dans le cas symétrique riemannien, L. Sliman-Bouattour a donné dans [11] une description de l'ensemble $\mathcal{Z}$ des champs de vecteurs lisses et K -invariants qui annulent tous les éléments de $C^\infty(\mathfrak{p})^K$: si l'espace symétrique est irréductible, il y a deux cas qui se présentent, ou bien la représentation de K dans le complexifié $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ de $\mathfrak{p}$ est irréductible, dans ce cas $\mathcal{Z}$ est réduit à $\{0\}$, ou bien il existe une structure complexe K -invariante $J : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$, dans ce cas $\mathcal{Z}$ est un $C^\infty(\mathfrak{p})^K$ -module libre dont $J\nabla P_1, \dots, J\nabla P_\ell$ est une base. En particulier $\mathcal{Z}$ est engendré par des champs de vecteurs invariants à coefficients polynomiaux. Nous verrons à la fin de cet article que pour la paire $(\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}), \mathfrak{so}(2, 1))$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{Z}$ à coefficients polynomiaux n'engendre pas $\mathcal{Z}$ comme module sur les fonctions lisses invariantes.

Signalons enfin qu'on trouve dans [1] une description des champs de vecteurs réguliers invariants sur les espaces symétriques réductifs complexes, analogue à celle de Raïs et Sliman-Bouattour.

Nous remercions Mustapha Raïs pour ses commentaires sur une première version de cet article.

2. Enoncé du résultat principal

Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathbb{C}[V]$ l'ensemble des polynômes complexes sur V . Si K est un sous-groupe de $GL(V)$, on note V^K l'ensemble des éléments de V fixés par tous les éléments de K . De même si $\mathcal{F}$ est un espace de fonctions sur V , on note $\mathcal{F}^K$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ fixés par l'action naturelle de K dans $\mathcal{F}$.

Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on note $V_\mathbb{C}$ son complexifié. Les algèbres $\mathbb{C}[V]$ et $\mathbb{C}[V_\mathbb{C}]$ sont naturellement isomorphes, et seront identifiées dans la suite. Ainsi les notations $\mathbb{C}[V]$ et $\mathbb{C}[V_\mathbb{C}]$ désigneront la même chose; on utilisera la seconde

pour souligner l'action d'un sous-groupe de $GL(V_{\mathbb{C}})$ dans l'algèbre des polynômes. Aussi la même lettre désignera à la fois un polynôme sur V et son prolongement à $V_{\mathbb{C}}$.

Si U est un ouvert de V , on note $C^\infty(U)$ l'ensemble des fonctions complexes de classe C^∞ sur U . On note $\mathfrak{X}(U) = C^\infty(U, V_{\mathbb{C}})$ l'ensemble des champs de vecteurs sur U à valeurs dans $V_{\mathbb{C}}$; ces champs de vecteurs opèrent naturellement dans $C^\infty(U)$: si $v \in V_{\mathbb{C}}$, vu comme champ de vecteurs constant, et si on écrit $v = v_1 + iv_2, v_i \in V$, alors, pour tout $f \in C^\infty(U)$,

$$v \cdot f(x) = \partial(v_1) \cdot f(x) + i\partial(v_2) \cdot f(x) = \frac{d}{dt}f(x + tv_1)|_{t=0} + i\frac{d}{dt}f(x + tv_2)|_{t=0};$$

on écrira aussi $\partial(v) \cdot f$ pour $v \cdot f$.

Dans toute la suite G désignera un groupe de Lie réductif connexe muni d'une involution σ . On note H la composante connexe de l'élément neutre du groupe des points fixes de σ , $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G , $\mathfrak{h}$ celle de H et encore σ la différentielle de σ en l'identité. On a alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme de sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1 de σ , et H agit dans $\mathfrak{q}$ par restriction de la représentation adjointe. Les couples (G, H) et $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sont appelés des paires symétriques réductives.

On utilisera librement les résultats classiques sur les paires symétriques (voir par exemple [15]).

On fixe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée κ sur $\mathfrak{g}$ invariante par G et par σ . Sa restriction à $\mathfrak{q}$ est alors non dégénérée. On note de la même façon son extension par linéarité à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

On notera $\text{Car}(\mathfrak{q})$ l'ensemble des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$. Pour $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, on note $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. C'est un système de racines non réduit en général, on note $W(\mathfrak{a})$, ou simplement W quand il n'y a pas de risque de confusion, son groupe de Weyl. On note $W(H, \mathfrak{a})$ le quotient du normalisateur de $\mathfrak{a}$ par son centralisateur dans H ; c'est un sous-groupe de $W(\mathfrak{a})$.

L'application de restriction induit un isomorphisme (isomorphisme de Chevalley) de l'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^H$ des polynômes H -invariants sur $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$, sur l'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}]^{W(\mathfrak{a})}$ des polynômes $W(\mathfrak{a})$ -invariants sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$.

Soit $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$. On note $\Delta_r(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ le sous-ensemble de $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ formé des racines α telles que $\frac{\alpha}{2}$ n'est pas une racine. Le polynôme

$$\prod_{\alpha \in \Delta_r(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} \alpha$$

est invariant par $W(\mathfrak{a})$, il se prolonge donc de façon unique en un polynôme H -invariant sur $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$, qu'on notera Φ . Il est clair que Φ ne dépend pas du choix du sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{g}$ est abélienne, on pose $\Phi = 1$.

L'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^H$ est une algèbre de polynômes. On en fixe un système minimal de générateurs homogènes $(P_1, \dots, P_\ell)$, ℓ étant le rang de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, c'est-à-dire la dimension de tout sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$.

La restriction à $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ de κ est non dégénérée; cela permet de définir le gradient ∇f de toute fonction lisse f sur un ouvert U de $\mathfrak{q}$. Si la fonction est H -invariante,

alors ∇f est un champ de vecteurs invariant. En particulier on dispose des champs de vecteurs ∇P_i , $1 \leq i \leq \ell$. Leur restriction à tout ouvert de $\mathfrak{q}$ sera notée de la même façon. On verra dans la section 8 que la fonction Φ est à une constante près égale à

$$\det(\nabla P_i \cdot P_j)_{1 \leq i, j \leq \ell}.$$

Rappelons qu'un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathfrak{q}$ est dit *complètement H -invariant* s'il est H -invariant et s'il contient la composante semi-simple (de la décomposition de Jordan) de chacun de ses éléments; on verra dans la section 4 les principales propriétés de ces ouverts.

Tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})^H$ induit une dérivation $\mathbb{C}$ -linéaire de $C^\infty(\mathcal{U})^H$, qu'on notera D_X . Le résultat principal de cet article est le théorème suivant.

Theorem 2.1. *Soit $\mathcal{U} \subset \mathfrak{q}$ un ouvert complètement H -invariant et soit $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})^H$. Alors D_X laisse stable l'idéal $\Phi C^\infty(\mathcal{U})^H$ de $C^\infty(\mathcal{U})^H$. Réciproquement, pour toute dérivation $\mathbb{C}$ -linéaire D de $C^\infty(\mathcal{U})^H$ qui laisse stable l'idéal $\Phi C^\infty(\mathcal{U})^H$, il existe des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell \in C^\infty(\mathcal{U})^H$, uniquement déterminées, telles que $D = D_X$, où $X = \sum_{1 \leq i \leq \ell} \varphi_i \nabla P_i$.*

La preuve de la première partie du théorème sera donnée dans la section 7 et celle de la deuxième partie dans la section 8.

Remark 2.2. On peut choisir les P_i à valeurs réelles sur $\mathfrak{q}$; ce fait est bien connu, on peut le démontrer en utilisant par exemple les arguments de ([2], Annexe). Il est facile de voir que Φ est réelle sur $\mathfrak{q}$. Ceci noté, on peut aisément obtenir une version réelle du théorème 2.1. Plus précisément si l'on note $C_{\mathbb{R}}^\infty(\mathcal{U})^H$ le sous-espace de $C^\infty(\mathcal{U})^H$ formée des fonctions réelles, et $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{U})^H$ le sous-espace de $\mathfrak{X}(\mathcal{U})^H$ formé des champs de vecteurs à valeurs dans $\mathfrak{q}$, alors le théorème est encore vrai si l'on remplace dans l'énoncé $\mathfrak{X}(\mathcal{U})^H$ par $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{U})^H$ et $C^\infty(\mathcal{U})^H$ par $C_{\mathbb{R}}^\infty(\mathcal{U})^H$; les φ_i sont dans ce cas dans $C_{\mathbb{R}}^\infty(\mathcal{U})^H$.

3. Développement de Taylor

Pour notre formulation des séries de Taylor, il est commode d'introduire la définition suivante. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Si a est un élément de V , on dit qu'un polynôme P sur V est *homogène de degré k* , $k \in \mathbb{N}$, en $x - a$ si

$$P(a + t(x - a)) = t^k P(x) \quad \text{pour tout } x \in V \text{ et tout } t \in \mathbb{R};$$

les polynômes homogènes en $x - a$ de degré 0 sont les constantes. L'ensemble de ces polynômes sera noté $\mathbb{C}[V_a]_k$.

On note $\mathbb{C}[[V_a]] = \prod_k \mathbb{C}[V_a]_k$; c'est une $\mathbb{C}$ -algèbre unitaire pour le produit:

$$(P_k)_{k \in \mathbb{N}} \cdot (Q_k)_{k \in \mathbb{N}} = (R_k)_{k \in \mathbb{N}}, \text{ où } R_k = \sum_{j=0}^k P_j Q_{k-j};$$

l'élément unité est la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$, avec $P_0 = 1$ et $P_k = 0$ pour $k \geq 1$. Un élément $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[[V_a]]$ est inversible si et seulement si $P_0 \neq 0$.

Pour $f \in C^\infty(U)$, on appelle *série de Taylor* de f en $a \in U$, qu'on note $T_a f$, l'élément $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[[V_a]]$ défini par

$$P_k(x) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} f(a + t(x - a))|_{t=0}.$$

Pour tout ouvert U contenant a , l'application T_a est un morphisme d'algèbres de $C^\infty(U)$ sur $\mathbb{C}[[V_a]]$, surjectif d'après le lemme de Borel (voir par exemple [14], théorème 38.1). Sa restriction à l'algèbre des polynômes est un isomorphisme de cette algèbre sur la sous-algèbre de $\mathbb{C}[[V_a]]$ formée des suites dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini. Pour cette raison, il est commode d'identifier un polynôme avec sa série de Taylor.

Le théorème suivant est fondamental pour cet article (voir [9], proposition 4.1).

Theorem 3.1. *Soient U un ouvert de V et P un polynôme non nul sur V . Pour que $f \in C^\infty(U)$ soit divisible par P , i.e. il existe $g \in C^\infty(U)$ tel que $f = Pg$, il faut et il suffit que pour tout $a \in U$, la série de Taylor $T_a f$ soit divisible par P dans $\mathbb{C}[[V_a]]$.*

L'action de $V_{\mathbb{C}}$ dans $C^\infty(V)$ par dérivations se prolonge de façon unique en une action de $S(V_{\mathbb{C}})$, qui identifie cette algèbre à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur V ; on note $\partial(u)$ l'opérateur différentiel associé à $u \in S(V_{\mathbb{C}})$. Pour $f \in C^\infty(U)$, $a \in U$ et $u \in S(V_{\mathbb{C}})$, on a

$$\partial(u) \cdot f(a) = \sum_k \partial(u) \cdot P_k(a);$$

où $T_a f = (P_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Soit $a \in U$. Tout vecteur $v \in V_{\mathbb{C}}$ définit une dérivation $\widehat{\partial}(v)$ de $\mathbb{C}[[V_a]]$ par

$$\widehat{\partial}(v) \cdot ((P_k)_{k \in \mathbb{N}}) = (Q_k)_{k \in \mathbb{N}}, \quad \text{avec } Q_k = \partial(v) \cdot P_{k+1}.$$

Il est clair que pour tout $f \in C^\infty(U)$ et pour tout $v \in V_{\mathbb{C}}$, on a

$$T_a(\partial(v) \cdot f) = \widehat{\partial}(v) \cdot (T_a f).$$

Si $X \in \mathfrak{X}(U)$, il existe une dérivation de $\mathbb{C}[[V_a]]$, qu'on note $T_a X$, définie de la façon suivante. Si on écrit $X = \sum_i \varphi_i v_i$, $\varphi_i \in C^\infty(U)$, alors

$$T_a X = \sum (T_a \varphi_i) \widehat{\partial}(v_i).$$

Elle vérifie

$$(T_a X) \cdot (T_a f) = T_a(X \cdot f), \quad \text{pour tout } f \in C^\infty(U).$$

L'application $\sum_i S_i \otimes v_i \mapsto \sum_i S_i \widehat{\partial}(v_i)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{C}[[V_a]] \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ sur l'espace vectoriel des dérivations $\mathbb{C}$ -linéaires de $\mathbb{C}[[V_a]]$ (voir [3],

Â§4, no. 6). Avec cette identification, si $X \in \mathfrak{X}(U)$, alors $T_a X$ s'identifie à la famille $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de polynômes homogènes sur V à valeurs dans $V_{\mathbb{C}}$ définie par

$$D_k(x) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} X(a + t(x - a))|_{t=0}.$$

Si $V_{\mathbb{C}}$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, ce qui permet de définir le gradient ∇f d'une fonction lisse f sur U , et si R est un polynôme homogène en $x - a$ de degré $d \geq 1$, on a

$$(T_a(\nabla R)) \cdot ((P_k)_{k \in \mathbb{N}}) = (Q_k)_{k \in \mathbb{N}}, \quad \text{avec } Q_k = \begin{cases} \nabla R \cdot P_{k-d+2} & \text{si } k \geq d-1 \\ 0 & \text{si } k < d-1 \end{cases}.$$

Si f est une fonction sur un ensemble A et si B est une partie de A , on note $f|_B$ la restriction de f à B .

Soit F un sous-espace vectoriel de V et soit $a \in U \cap F$. Pour tout $f \in C^\infty(U)$, si l'on note $T_a f = (P_k)_{k \in \mathbb{N}}$, alors il est clair d'après les définitions que

$$T_a(f|(U \cap F)) = (P_k|_F)_{k \in \mathbb{N}}.$$

4. Méthode de descente

Nous rappelons dans cette section les principaux outils de la méthode de descente de Harish-Chandra.

Si $a \in \mathfrak{g}$ est semi-simple, on note G^a (resp. H^a) le fixateur de a dans G (resp. H), le groupe H^a n'est pas forcément connexe. On note $\mathfrak{g}^a$, $\mathfrak{h}^a$ et $\mathfrak{q}^a$ les centralisateurs de a respectivement dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{q}$. Alors $(\mathfrak{g}^a, \mathfrak{h}^a)$ est une paire symétrique réductive et $\mathfrak{g}^a = \mathfrak{h}^a \oplus \mathfrak{q}^a$. Un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{q}^a$ est dit *H^a -complètement invariant* s'il est H^a -invariant et s'il contient la composante semi-simple de chacun de ses éléments.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert complètement H -invariant de $\mathfrak{q}$ et soit $a \in \mathcal{U}$ semi-simple. On a ([5], proposition 3.1):

Proposition 4.1. *Il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de a dans $\mathfrak{q}^a$ complètement H^a -invariant et vérifiant:*

- (i) *l'application $\pi : H \times \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{q}$ définie par $\pi(h, y) = h \cdot y$ est une submersion et $\mathcal{W} = \pi(H \times \mathcal{V})$ est un ouvert complètement H -invariant de $\mathfrak{q}$ inclus dans $\mathcal{U}$;*
- (ii) *l'application de restriction est un isomorphisme de $C^\infty(\mathcal{W})^H$ sur $C^\infty(\mathcal{V})^{H^a}$.*

Il est à noter que l'application π induit une bijection de l'espace fibré $H \times_{H^a} \mathcal{V}$ sur l'ouvert $\mathcal{W}$. Donc si (ρ, E) est une représentation de dimension finie de H , toute fonction $f \in C^\infty(\mathcal{V}, E)^{H^a}$ se prolonge de façon unique en une fonction $\tilde{f} \in C^\infty(\mathcal{W}, E)^H$.

Corollary 4.2. *Il existe une fonction $\chi \in C^\infty(\mathfrak{q})^H$ telle que $0 \leq \chi(y) \leq 1$ pour tout $y \in \mathfrak{q}$, $\chi = 1$ dans un voisinage de a et de support inclus dans $\mathcal{U}$.*

La preuve est une adaptation au cas symétrique de celle du théorème 1.27 de ([16], Part I); tous les ingrédients se trouvent dans la preuve de ([5], proposition 3.1).

Lemma 4.3. *Soit $f \in C^\infty(\mathcal{U})^H$ et soit $a \in \mathcal{U}$ semi-simple. Alors $\nabla f(y) \in \mathfrak{q}_\mathbb{C}^a$ pour tout $y \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{q}^a$.*

Proof. La restriction de κ à $\mathfrak{q}_\mathbb{C}^a$ étant non dégénérée, il suffit de montrer que la différentielle $df(y)$ de f en y est nulle sur l'orthogonal $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{q}^a$ dans $\mathfrak{q}$ pour κ .

On note $'\mathfrak{q}^a$ l'ensemble des $y \in \mathfrak{q}^a$ tels que $\det(\text{ad } y)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^a} \neq 0$; c'est un ouvert dense de $\mathfrak{q}^a$. Pour tout $y \in '\mathfrak{q}^a$, on a $\mathfrak{m} \subset [y, \mathfrak{h}]$.

Soit $\xi \in \mathfrak{h}$ et soit $y \in \mathcal{U} \cap '\mathfrak{q}^a$. La fonction $t \mapsto f(\exp t\xi \cdot y)$, définie dans un voisinage de 0, est constante, donc

$$df(y) \cdot [y, \xi] = \frac{d}{dt} f(\exp -t\xi \cdot y)|_{t=0} = 0.$$

Il s'ensuit que $df(y)$ est nulle sur $\mathfrak{m}$ pour tout $y \in \mathcal{U} \cap '\mathfrak{q}^a$, et donc, par densité de $\mathcal{U} \cap '\mathfrak{q}^a$ dans $\mathcal{U} \cap \mathfrak{q}^a$, $df(y)$ est nulle sur $\mathfrak{m}$ pour tout $y \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{q}^a$. ■

Si $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre associative et unitaire, on note $\text{Der}(\mathcal{A})$ l'ensemble de ses dérivations $\mathbb{C}$ -linéaires.

Proposition 4.4. *Soit $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ deux ouverts complètement H -invariants de $\mathfrak{q}$ et soit $D \in \text{Der}(C^\infty(\mathcal{U})^H)$. Il existe une unique dérivation $D' \in \text{Der}(C^\infty(\mathcal{U}')^H)$ telle que*

$$D' \cdot (f|_{\mathcal{U}'}) = (D \cdot f)|_{\mathcal{U}'} \quad \text{pour tout } f \in C^\infty(\mathcal{U})^H.$$

Proof. Tenant compte du corollaire 4.2, la preuve est exactement la même que dans le cas usuel (sans action de groupe), voir par exemple ([8], théorème III.17). ■

5. Division par un polynôme invariant

L'involution σ de $\mathfrak{g}$ définit par linéarité une involution $\sigma_\mathbb{C}$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. On note $H_\mathbb{C}$ la composante neutre du commutant de $\sigma_\mathbb{C}$ dans le groupe adjoint de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Ce groupe opère naturellement dans $\mathfrak{q}_\mathbb{C}$, et les sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}_\mathbb{C}$ sont tous conjugués sous son action.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert complètement H -invariant de $\mathfrak{q}$. Pour alléger les notations dans ce qui suit, pour $f \in C^\infty(\mathcal{U})^H$ et pour $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, on note $f|_{\mathfrak{a}}$ pour $f|_{(\mathcal{U} \cap \mathfrak{a})}$.

Proposition 5.1. *Soient $f \in C^\infty(\mathcal{U})^H$ et $P \in \mathbb{C}[\mathfrak{q}]^H$ non nul. On suppose que pour tout $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, il existe $g_{\mathfrak{a}} \in C^\infty(\mathcal{U} \cap \mathfrak{a})$ tel que $f|_{\mathfrak{a}} = (P|_{\mathfrak{a}})g_{\mathfrak{a}}$. Alors il existe $g \in C^\infty(\mathcal{U})^H$ tel que $f = Pg$.*

Proof. On commence par montrer qu'il existe une fonction continue g sur $\mathcal{U}$, forcément unique, telle que $g|_{\mathfrak{a}} = g_{\mathfrak{a}}$ pour tout $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$.

Il est clair que pour tout $h \in H$ et pour tout $\mathbf{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, on a $h \cdot g_{\mathbf{a}} = g_{h \cdot \mathbf{a}}$. Donc, d'après ([5], lemme 6.1), il suffit de montrer que pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$ et pour tout $a \in \mathcal{U} \cap \mathbf{a} \cap \mathbf{b}$, on a $g_{\mathbf{a}}(a) = g_{\mathbf{b}}(a)$.

Supposons donc $\mathbf{a}, \mathbf{b}, a$ donnés comme ci-dessus. Il existe $u \in S(\mathbf{a}_{\mathbb{C}})$ homogène tel que $\partial(u) \cdot (P|\mathbf{a})(a) = 1$ et $\partial(v) \cdot (P|\mathbf{a})(a) = 0$ pour tout $v \in S(\mathbf{a}_{\mathbb{C}})$ homogène de degré strictement plus petit que celui de u (le degré de u est le degré du premier terme non nul dans le développement de Taylor de $P|\mathbf{a}$ en a). Alors

$$\partial(u) \cdot (f|\mathbf{a})(a) = \partial(u) \cdot ((P|\mathbf{a})g_{\mathbf{a}})(a) = g_{\mathbf{a}}(a). \quad (1)$$

On note $H_{\mathbb{C}}^a$ le sous-groupe des éléments de $H_{\mathbb{C}}$ qui fixent a . Il existe $h \in H_{\mathbb{C}}^a$ tel que $h \cdot \mathbf{a}_{\mathbb{C}} = \mathbf{b}_{\mathbb{C}}$. D'après ([5], théorème 5.1),

$$\partial(h \cdot u) \cdot (f|\mathbf{b})(a) = \partial(u) \cdot (f|\mathbf{a})(a) \quad \text{et} \quad \partial(h \cdot u) \cdot (P|\mathbf{b})(a) = \partial(u) \cdot (P|\mathbf{a})(a) = 1; \quad (2)$$

de plus, pour tout $v \in S(\mathbf{b}_{\mathbb{C}})$ homogène de degré strictement plus petit que celui de u , on a

$$\partial(v) \cdot (P|\mathbf{b})(a) = \partial(h^{-1} \cdot v) \cdot (P|\mathbf{a})(a) = 0,$$

donc

$$\partial(h \cdot u) \cdot (f|\mathbf{b})(a) = \partial(h \cdot u) \cdot ((P|\mathbf{b})g_{\mathbf{b}})(a) = g_{\mathbf{b}}(a). \quad (3)$$

Il découle alors de (1), (2) et (3) que $g_{\mathbf{a}}(a) = g_{\mathbf{b}}(a)$.

Pour montrer que g est lisse, on utilise ([5], théorème 5.1). La fonction g doit vérifier deux conditions. La première est l'invariance de $g_{\mathbf{a}}$ par le groupe $W(H, \mathbf{a})$ pour tout $\mathbf{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$; cette propriété découle facilement de l'invariance de $f|\mathbf{a}$ et de $P|\mathbf{a}$ par ce groupe. La seconde est que pour tout $a \in \mathfrak{q}$ semi-simple, pour tous $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \text{Car}(\mathfrak{q})$ contenant a , pour tout $h \in H_{\mathbb{C}}^a$ tel que $h \cdot \mathbf{a}_{1\mathbb{C}} = \mathbf{a}_{2\mathbb{C}}$ et pour tout $u \in S(\mathbf{a}_{1\mathbb{C}})$, on a

$$\partial(u) \cdot g_{\mathbf{a}_1}(a) = \partial(h \cdot u) \cdot g_{\mathbf{a}_2}(a). \quad (4)$$

Supposons que nous ayons toutes ces données. On fixe une base $(v_1, \dots, v_{\ell})$ de $\mathbf{a}_1$, et pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell}) \in \mathbb{N}^{\ell}$, on note $v^{\alpha} = v_1^{\alpha_1} \cdots v_{\ell}^{\alpha_{\ell}}$, produit dans $S(\mathbf{a}_{1\mathbb{C}})$. La famille $(v^{\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}^{\ell}}$ est une base de $S(\mathbf{a}_{1\mathbb{C}})$. On va donc montrer (4) pour les v^{α} . Pour cela nous avons besoin d'une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^{\ell}$ pour faire une récurrence.

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell}) \in \mathbb{N}^{\ell}$, on note $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\ell}$ sa longueur. On dispose de la relation d'ordre sur $\mathbb{N}^{\ell}$: $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_{\ell} \leq \beta_{\ell}$, de la relation d'ordre lexicographique: $\alpha \leq_L \beta$ si $\alpha = \beta$ ou s'il existe $1 \leq j \leq \ell$ tel que $\alpha_i = \beta_i$ pour $1 \leq i < j$ et $\alpha_j < \beta_j$. On définit une nouvelle relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^{\ell}$ par

$$\alpha \preceq \beta \quad \text{si} \quad |\alpha| < |\beta| \quad \text{ou} \quad |\alpha| = |\beta| \quad \text{et} \quad \alpha \leq_L \beta.$$

Si $\alpha \preceq \beta$ et $\alpha \neq \beta$, on écrit $\alpha \prec \beta$.

On va donc montrer (4) pour les v^{α} par récurrence suivant l'ordre $\preceq$. On l'a déjà prouvé plus haut pour $|\alpha| = 0$.

On note d le plus petit des entiers k tels que la restriction à $\mathbf{a}_1$ de la composante homogène en $x - a$ de degré k de $T_a P$ soit non nulle. Soit α^0 le plus

petit $\alpha \in \mathbb{N}^\ell$ pour l'ordre $\preceq$ tel que $\partial(v^\alpha) \cdot (P|_{\mathfrak{a}_1})(a) \neq 0$. On a $|\alpha^0| = d$, et, pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^\ell$ de longueur $< d$, $\partial(v^\gamma) \cdot (P|_{\mathfrak{a}_1})(a) = 0$.

D'après ([5], théorème 5.1)), pour toute fonction $F \in C^\infty(\mathcal{U})^H$ et pour tout $u \in S(\mathfrak{a}_{1\mathbb{C}})$, on a

$$\partial(u) \cdot (F|_{\mathfrak{a}_1})(a) = \partial(h \cdot u) \cdot (F|_{\mathfrak{a}_2})(a). \quad (5)$$

Il découle donc de ce qui précède que $\partial(h \cdot v^{\alpha^0}) \cdot (P|_{\mathfrak{a}_2})(a) \neq 0$ et $\partial(h \cdot v^\gamma) \cdot (P|_{\mathfrak{a}_2})(a) = 0$ si $|\gamma| < d$.

Soit $\beta \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $|\beta| \geq 1$. On suppose que la condition (4) est vérifiée pour les v^γ , $\gamma \prec \beta$. Avec les notations usuelles, on a

$$\partial(v^{\beta+\alpha^0}) \cdot f_{\mathfrak{a}_1}(a) = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^\ell \\ \gamma \leq \beta+\alpha^0}} \binom{\beta+\alpha^0}{\gamma} \partial(v^\gamma) \cdot (P|_{\mathfrak{a}_1})(a) \partial(v^{\beta+\alpha^0-\gamma}) \cdot g_{\mathfrak{a}_1}(a) \quad (6)$$

$$\partial(h \cdot v^{\beta+\alpha^0}) \cdot f_{\mathfrak{a}_2}(a) = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^\ell \\ \gamma \leq \beta+\alpha^0}} \binom{\beta+\alpha^0}{\gamma} \partial(h \cdot v^\gamma) \cdot (P|_{\mathfrak{a}_2})(a) \partial(h \cdot v^{\beta+\alpha^0-\gamma}) \cdot g_{\mathfrak{a}_2}(a) \quad (7)$$

Il découle de (5), appliqué à f , que les membres de gauche de (6) et de (7) sont égaux. Pour les membres de droite, on a $\partial(v^\gamma) \cdot (P|_{\mathfrak{a}_1})(a) = \partial(h \cdot v^\gamma) \cdot (P|_{\mathfrak{a}_2})(a)$ pour tout γ ; ces termes sont nuls si $|\gamma| < d$ et l'hypothèse de récurrence implique que $\partial(v^{\beta+\alpha^0-\gamma}) \cdot g_{\mathfrak{a}_1}(a) = \partial(h \cdot v^{\beta+\alpha^0-\gamma}) \cdot g_{\mathfrak{a}_2}(a)$ si $\beta + \alpha^0 - \gamma \prec \beta$; cela est vrai en particulier pour tout γ de longueur $|\gamma| > d$. Il s'ensuit que les sommes des termes correspondant aux γ de longueur d dans les membres de droite de (6) et de (7) sont égales, soit

$$\sum_{\substack{\gamma \leq \beta+\alpha^0 \\ |\gamma|=d}} \binom{\beta+\alpha^0}{\gamma} \partial(v^\gamma) \cdot (P|_{\mathfrak{a}_1})(a) \left[\partial(v^{\beta+\alpha^0-\gamma}) \cdot g_{\mathfrak{a}_1}(a) - \partial(h \cdot v^{\beta+\alpha^0-\gamma}) \cdot g_{\mathfrak{a}_2}(a) \right] = 0.$$

Dans cette somme la contribution des $\gamma \prec \alpha^0$ est nulle, puisque $\partial(v^\gamma) \cdot (P|_{\mathfrak{a}_1})(a) = 0$ par définition de α^0 . Il en est de même de la contribution des γ vérifiant $\beta + \alpha^0 - \gamma \prec \beta$, d'après l'hypothèse de récurrence. Il ne reste plus que la contribution des γ vérifiant:

$$\gamma \leq \beta + \alpha^0, \quad |\gamma| = d, \quad \alpha^0 \preceq \gamma, \quad \beta \preceq \beta + \alpha^0 - \gamma.$$

Un tel γ vérifie $|\gamma| = |\alpha^0|$, et donc $|\beta + \alpha^0 - \gamma| = |\beta|$; d'où $\beta \leq_L \beta + \alpha^0 - \gamma$ et $\alpha^0 \leq_L \gamma$. Seul $\gamma = \alpha^0$ est solution de ces deux inégalités. D'où

$$\partial(v^{\alpha^0}) \cdot (P|_{\mathfrak{a}_1})(a) \left[\partial(v^\beta) \cdot g_{\mathfrak{a}_1}(a) - \partial(h \cdot v^\beta) \cdot g_{\mathfrak{a}_2}(a) \right] = 0.$$

Comme $\partial(v^{\alpha^0}) \cdot (P|_{\mathfrak{a}_1})(a) \neq 0$, il s'ensuit que

$$\partial(v^\beta) \cdot g_{\mathfrak{a}_1}(a) = \partial(h \cdot v^\beta) \cdot g_{\mathfrak{a}_2}(a). \quad \blacksquare$$

6. Dérivations dans les sous-espaces de Cartan

On fixe un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{g})$ et un élément $a \in \mathfrak{a}$. On reprend les notations de la section 4 et on note $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{c}$) l'intersection de l'algèbre dérivée (resp. du centre) de $\mathfrak{g}^a$ avec $\mathfrak{q}^a$ de sorte que $\mathfrak{q}^a = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{c}$. On note $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{s}$, alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c}$.

On note W^a l'ensemble des éléments de $W(\mathfrak{a})$ qui fixent a . C'est un sous-groupe de $W(\mathfrak{a})$ qui s'identifie au groupe de Weyl du système de racines $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^a, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. Il opère trivialement sur $\mathfrak{c}$.

L'algèbre des invariants $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]^{W^a}$ est égale à $\mathbb{C}[\mathfrak{c}] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{b}]^{W^a}$, et $\mathbb{C}[\mathfrak{b}]^{W^a}$ est une algèbre de polynômes. On fixe un système minimal de générateurs homogènes $q_1, \dots, q_r$, $r = \dim \mathfrak{b}$, de $\mathbb{C}[\mathfrak{b}]^{W^a}$, qu'on regarde comme des polynômes sur $\mathfrak{a}$ invariants par translation par les éléments de $\mathfrak{c}$. Sans nuire à la généralité, on suppose que les q_i sont à valeurs réelles sur $\mathfrak{a}$ (voir remarque 2.2). On fixe des coordonnés linéaires réelles $x_1, \dots, x_{\ell-r}$ sur $\mathfrak{c}$, qu'on regarde comme des formes linéaires sur $\mathfrak{a}$ nulles sur $\mathfrak{b}$. Alors les polynômes $q_1, \dots, q_{\ell}$, avec $q_{r+j} = x_j - a_j$ pour $1 \leq j \leq \ell - r$, sont homogènes en $x - a$ et engendrent $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]^{W^a}$. On notera d_i le degré d'homogénéité de q_i .

On note $\mathbb{C}[[q_1, \dots, q_{\ell}]]$ l'algèbre des séries formelles en les variables $q_1, \dots, q_{\ell}$. Si l'on note, pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell}) \in \mathbb{N}^{\ell}$, $q^{\alpha} = q_1^{\alpha_1} \cdots q_{\ell}^{\alpha_{\ell}}$, alors tout élément de $\mathbb{C}[[q_1, \dots, q_{\ell}]]$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\ell}} c_{\alpha} q^{\alpha}, \quad c_{\alpha} \in \mathbb{C}.$$

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert complètement H -invariant de $\mathfrak{g}$ contenant a . On note $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \mathfrak{a}$ et $C^{\infty}(\mathcal{V})^{\text{inv}}$ l'ensemble des restrictions $f|_{\mathcal{V}}$, $f \in C^{\infty}(\mathcal{U})^H$; on trouvera une caractérisation de cet ensemble dans ([6]). En particulier, pour tout $f \in C^{\infty}(\mathcal{V})^{\text{inv}}$, la série de Taylor de f en a appartient à l'algèbre $\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W^a}$ des invariants par W^a dans $\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]$.

L'application qui associe à un élément $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\ell}} c_{\alpha} q^{\alpha}$ de $\mathbb{C}[[q_1, \dots, q_{\ell}]]$ la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]$ définie par

$$P_k = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{\ell} \\ \alpha_1 d_1 + \cdots + \alpha_{\ell} d_{\ell} = k}} c_{\alpha} q^{\alpha}$$

est un isomorphisme d'algèbres de $\mathbb{C}[[q_1, \dots, q_{\ell}]]$ sur $\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W^a}$. Dans la suite on identifiera ces deux algèbres.

Lemma 6.1. *L'application $f \mapsto T_a f$ de $C^{\infty}(\mathcal{V})^{\text{inv}}$ dans $\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W^a}$ est un morphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres surjectif.*

Proof. Soit η l'application de $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{R}^{\ell}$ définie par $\eta(x) = (q_1(x), \dots, q_{\ell}(x))$. On a $\eta(a) = 0$. Soit $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\ell}} c_{\alpha} q^{\alpha} \in \mathbb{C}[[q_1, \dots, q_{\ell}]]$. On note $y_1, \dots, y_{\ell}$ les coordonnées de $\mathbb{R}^{\ell}$. D'après le lemme de Borel, il existe $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{\ell})$ tel que

$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial y_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_{\ell}}}{\partial y_{\ell}^{\alpha_{\ell}}} \varphi(0) = \alpha! c_{\alpha}, \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^{\ell}.$$

Un calcul simple montre que $T_a(\varphi \circ \eta) = S$.

Le groupe $H_{\mathbb{C}}^a$ n'est pas connexe en général, cependant il découle de ([7], proposition 10 et la discussion à la page 780) que les polynômes invariants par $H_{\mathbb{C}}^a$ ou par sa composante neutre sont les mêmes, d'où l'isomorphisme de Chevalley $\mathbb{C}[\mathfrak{q}^a]^{H_{\mathbb{C}}^a} \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{a}]^{W^a}$, et comme l'action de H^a dans $\mathfrak{q}^a$ se factorise à travers $H_{\mathbb{C}}^a$, on a $\mathbb{C}[\mathfrak{q}^a]^{H_{\mathbb{C}}^a} = \mathbb{C}[\mathfrak{q}^a]^{H^a}$. Donc, pour tout $1 \leq i \leq \ell$, il existe un unique élément Q_i de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}^a]^{H^a}$ dont la restriction à $\mathfrak{a}$ est égale à q_i ; ce polynôme est à valeurs réelles sur $\mathfrak{q}^a$. On considère l'application H -invariante $\tilde{\eta} : \mathfrak{q}^a \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ définie par $\tilde{\eta}(x) = (Q_1(x), \dots, Q_\ell(x))$. Alors $\varphi \circ \tilde{\eta} \in C^\infty(\mathfrak{q}^a)^{H^a}$. D'après la proposition 4.1, il existe un voisinage ouvert complètement H -invariant $\mathcal{U}'$ de a et une fonction $f \in C^\infty(\mathcal{U}')^H$ tels que $f|(\mathcal{U}' \cap \mathfrak{q}^a) = \varphi \circ \tilde{\eta}|(\mathcal{U}' \cap \mathfrak{q}^a)$, et quitte à multiplier f par une fonction "plateau" qui vaut 1 dans un voisinage de a (corollaire 4.2), on peut la supposer dans $C^\infty(\mathcal{U})^H$. Sa restriction à $\mathcal{V}$ coïncide avec $\varphi \circ \eta$ dans un voisinage de a , donc $T_a(f|_{\mathcal{V}}) = S$. ■

Lemma 6.2. *Soit $\delta \in \text{Der}(C^\infty(\mathcal{V})^{\text{inv}})$. Il existe une unique dérivation $\delta_a \in \text{Der}(\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W^a})$ telle que*

$$T_a(\delta \cdot f) = \delta_a \cdot (T_a f) \quad \text{pour tout } f \in C^\infty(\mathcal{V})^{\text{inv}}.$$

Proof. Il suffit de montrer que si la série de Taylor en a de $f \in C^\infty(\mathcal{V})^{\text{inv}}$ est nulle, alors il en est de même de $T_a(\delta \cdot f)$.

Soit donc $f \in C^\infty(\mathcal{V})^{\text{inv}}$ tel que $T_a f = 0$. Si $\chi \in C^\infty(\mathcal{U})^H$ est égale à 1 dans un voisinage de a , alors

$$T_a(\delta \cdot ((\chi|_{\mathcal{V}})f)) = T_a(\delta \cdot (\chi|_{\mathcal{V}}))T_a(f) + T_a(\chi|_{\mathcal{V}})T_a(\delta \cdot f) = T_a(\delta \cdot f),$$

car $T_a f = 0$ et $T_a(\chi|_{\mathcal{V}})$ est l'élément unité de $\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W^a}$. Cela nous permettra au besoin de remplacer f par une fonction de la forme $(\chi|_{\mathcal{V}})f$ sans nuire à la généralité.

Pour $x \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, on pose $q(x) = q_1(x)^2 + \dots + q_\ell(x)^2$. Alors q est un polynôme W^a -invariant à valeurs positives sur $\mathfrak{a}$, et a est l'unique élément de $\mathfrak{a}$ où il s'annule. Avec les notations de la preuve du lemme 6.1, on note $Q = Q_1^2 + \dots + Q_\ell^2$. Alors Q est à valeurs positives sur $\mathfrak{q}^a$ et le seul point où il s'annule est a . On note $\tilde{Q}$ son prolongement H -invariant à un voisinage complètement H -invariant $\mathcal{U}'$ de a , alors les seuls points de $\mathcal{U}'$ où $\tilde{Q}$ s'annule sont les éléments de l'orbite de a sous H .

Soit $\tilde{f}$ un prolongement de f en un élément de $C^\infty(\mathcal{U})^H$. L'hypothèse faite sur f implique ([5], théorème 5.1) que pour tout $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$ et tout $x \in \mathfrak{b} \cap (H \cdot a)$, la série de Taylor de $\tilde{f}|(\mathcal{U} \cap \mathfrak{b})$ en x est nulle. Quitte à multiplier $\tilde{f}$ par une fonction χ comme ci-dessus, on peut supposer que $\tilde{f}$ est à support dans $\mathcal{U}'$. Donc, pour tout $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, la série de Taylor de $\tilde{f}|(\mathcal{U} \cap \mathfrak{b})$ est nulle en tout point de $\mathcal{U} \cap \mathfrak{b}$ où $\tilde{Q}|_{\mathfrak{b}}$ s'annule. Il découle alors du théorème 3.1 que, pour tout entier $k \geq 1$, le polynôme $\tilde{Q}^k|_{\mathfrak{b}}$ divise $\tilde{f}|(\mathcal{U} \cap \mathfrak{b})$, et donc, d'après la proposition 5.1, $\tilde{Q}^k$ divise $\tilde{f}$. Donc, pour tout entier $k \geq 1$, il existe $g_k \in C^\infty(\mathcal{V})^{\text{inv}}$ tel que $f = q^k g_k$. Un calcul simple montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^k}{dt^k}(\delta(q^{k+2}g_{k+2}))(a + t(x - a))|_{t=0} = 0.$$

il en découle que $T_a(\delta \cdot f) = 0$. ■

On note Φ^a l'analogue de Φ pour la paire symétrique réductive $(\mathfrak{g}^a, \mathfrak{h}^a)$. Il existe un polynôme H^a -invariant Ψ^a sur $\mathfrak{q}^a$ tel que $\Phi|_{\mathfrak{q}^a} = \Psi^a \Phi^a$. La restriction de Ψ^a à $\mathfrak{a}$ est égale à

$$\prod_{\substack{\alpha \in \Delta_r(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \\ \alpha(a) \neq 0}} \alpha,$$

donc $\Psi^a(a) \neq 0$. La restriction de Φ^a à $\mathfrak{a}$ est un polynôme homogène en $x - a$ invariant par W^a ; on l'identifiera, ainsi que tout polynôme W^a -invariant, à son image dans $\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W^a}$.

Lemma 6.3. *Soit $\delta \in \text{Der}(C^\infty(\mathcal{V})^{\text{inv}})$. On suppose que δ laisse stable l'idéal $(\Phi|\mathfrak{a})C^\infty(\mathcal{V})^{\text{inv}}$. Alors δ_a laisse stable l'idéal $(\Phi^a|\mathfrak{a})\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W^a}$ de $\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W^a}$.*

Proof. Compte tenu du lemme 6.1, il est clair que δ_a laisse stable l'idéal de $\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W^a}$ engendré par $\Phi|\mathfrak{a}$. Cet idéal est aussi l'idéal engendré par $\Phi^a|\mathfrak{a}$, car $\Psi^a|\mathfrak{a}$ est inversible dans $\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W^a}$. ■

Les champs de vecteurs ∇q_i induisent des dérivations de $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]^{W^a}$ et de $\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W^a}$, qu'on continue de noter ∇q_i (ici et dans toute la suite, les gradients des fonctions sur un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ sont définis relativement à la restriction de κ à $\mathfrak{a}$). On note $\mathfrak{X}_p(\mathfrak{a})$ l'ensemble des champs de vecteurs sur $\mathfrak{a}$ à coefficients polynomiaux.

Proposition 6.4. (i) *Tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}_p(\mathfrak{a})^{W^a}$ s'écrit de façon unique $X = \sum_{1 \leq i \leq \ell} R_i \nabla q_i$, où les R_i sont des éléments de $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]^{W^a}$.*

(ii) *L'application $X \mapsto D_X$ est une bijection de $\mathfrak{X}_p(\mathfrak{a})^{W^a}$ sur le sous-espace de $\text{Der}(\mathbb{C}[\mathfrak{a}]^{W^a})$ formé des dérivations qui laissent stable l'idéal $(\Phi^a|\mathfrak{a})\mathbb{C}[\mathfrak{a}]^{W^a}$.*

L'assertion (i) découle du théorème principal de [12]. L'assertion (ii) est la formulation de Raïs ([10], Â§ 3.2.) d'un cas particulier du résultat principal de [13].

Proposition 6.5. *Toute dérivation δ de $\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W^a}$ qui laisse stable l'idéal engendré par $\Phi^a|\mathfrak{a}$ est de la forme $\sum_{1 \leq i \leq \ell} S_i \nabla q_i$, où les S_i sont des éléments de $\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W^a}$ uniquement déterminés.*

Proof. La preuve est inspirée de celle de la proposition 6.1 de [13]. On utilise l'identification $\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W^a} \simeq \mathbb{C}[[q_1, \dots, q_\ell]]$.

Pour $1 \leq i \leq \ell$, on note ∂_i la dérivation de $\mathbb{C}[q_1, \dots, q_\ell]$ définie par $\partial_i \cdot q_j = \delta_{ij}$, $1 \leq j \leq \ell$. Elle se prolonge de façon unique en une dérivation de $\mathbb{C}[[q_1, \dots, q_\ell]]$ qu'on note encore ∂_i . On a alors

$$\text{Der}(\mathbb{C}[q_1, \dots, q_\ell]) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{C}[q_1, \dots, q_\ell] \partial_i ; \quad \text{Der}(\mathbb{C}[[q_1, \dots, q_\ell]]) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{C}[[q_1, \dots, q_\ell]] \partial_i.$$

On note $\mathfrak{X}(\mathfrak{a}/_{W^a})$ (resp. $\mathfrak{X}((\mathfrak{a}/_{W^a}))$) l'ensemble des dérivations de l'algèbre $\mathbb{C}[q_1, \dots, q_\ell]$ (resp. $\mathbb{C}[[q_1, \dots, q_\ell]]$) qui laissent stable l'idéal engendré par $\Phi^a|\mathfrak{a}$. D'après la proposition 6.4, tout élément δ de $\mathfrak{X}(\mathfrak{a}/_{W^a})$ s'écrit de façon unique $\delta = \sum_{1 \leq i \leq \ell} p_i \nabla q_i$, $p_i \in \mathbb{C}[\mathfrak{a}]^{W^a}$.

On considère les applications

$$\mathrm{Der}(\mathbb{C}[q_1, \dots, q_\ell] \xrightarrow{u} \mathbb{C}[q_1, \dots, q_\ell]^\ell \xrightarrow{v} \mathbb{C}[q_1, \dots, q_\ell]/(\Phi^a|\mathfrak{a})\mathbb{C}[q_1, \dots, q_\ell]$$

définies par $u(\sum_{1 \leq i \leq \ell} r_i \partial_i) = (r_1, \dots, r_\ell)$ et $v(s_1, \dots, s_\ell) = \sum_{1 \leq i \leq \ell} s_i \partial_i(\Phi^a|\mathfrak{a})$, de sorte que $\ker v = u(\mathfrak{X}(\mathfrak{a}/_{W^a}))$; d'où la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{X}(\mathfrak{a}/_{W^a}) \rightarrow \mathbb{C}[q_1, \dots, q_\ell]^\ell \rightarrow \mathbb{C}[q_1, \dots, q_\ell]/(\Phi^a|\mathfrak{a})\mathbb{C}[q_1, \dots, q_\ell]. \quad (8)$$

On obtient de même la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{X}((\mathfrak{a}/_{W^a})) \rightarrow \mathbb{C}[[q_1, \dots, q_\ell]]^\ell \rightarrow \mathbb{C}[[q_1, \dots, q_\ell]]/(\Phi^a|\mathfrak{a})\mathbb{C}[[q_1, \dots, q_\ell]].$$

Comme $\mathbb{C}[[q_1, \dots, q_\ell]]$ est (fidèlement) plat sur $\mathbb{C}[q_1, \dots, q_\ell]$, on en tire, en tensorisant (8) par $\mathbb{C}[[q_1, \dots, q_\ell]]$, que l'application naturelle de $\mathfrak{X}(\mathfrak{a}/_{W^a}) \otimes_{\mathbb{C}[q_1, \dots, q_\ell]} \mathbb{C}[[q_1, \dots, q_\ell]]$ dans $\mathfrak{X}((\mathfrak{a}/_{W^a}))$ est un isomorphisme. La proposition en découle. ■

7. Preuve de la première partie du théorème 2.1

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert complètement H -invariant de $\mathfrak{q}$. On se propose de montrer dans cette section que pour tout $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})^H$, la dérivation D_X de $C^\infty(\mathcal{U})^H$ laisse stable l'idéal $\Phi C^\infty(\mathfrak{q})^H$. Pour cela il suffit de montrer que $D_X \Phi \in \Phi C^\infty(\mathfrak{q})^H$, ou, ce qui revient au même, que Φ divise $D_X \Phi$.

Si $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$, on note $\Phi_{\mathfrak{a}}$ la restriction de Φ à $\mathfrak{a}$, qu'on regarde aussi, selon nos conventions, comme un polynôme sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$.

On note $\mathfrak{q}_{\mathrm{reg}}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{q}$, et si F est une partie de $\mathfrak{q}$, on note $F_{\mathrm{reg}} = F \cap \mathfrak{q}_{\mathrm{reg}}$. Soit $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$. Comme toute racine de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est un multiple d'un élément de $\Delta_r(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ (notation de la section 2.1), il s'ensuit que $\mathfrak{q}_{\mathrm{reg}}$ est l'ensemble des $x \in \mathfrak{q}$ tels que $\Phi(x) \neq 0$.

Lemma 7.1. *Soit $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})^H$. Pour tout $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$, il existe $g_{\mathfrak{a}} \in C^\infty(\mathcal{U} \cap \mathfrak{a})$ tel que $(X\Phi)|(\mathcal{U} \cap \mathfrak{a}) = g_{\mathfrak{a}} \Phi_{\mathfrak{a}}$.*

Proof. On montre le lemme par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$. C'est évident si $\mathfrak{g}$ est abélienne. On suppose le résultat démontré pour les algèbres de Lie réductives $\mathfrak{g}'$ telles que $\dim \mathfrak{g}' < \dim \mathfrak{g}$.

On fixe $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$. Pour montrer que $\Phi_{\mathfrak{a}}$ divise $(X \cdot \Phi)|\mathcal{U} \cap \mathfrak{a}$, il suffit, d'après le théorème 3.1, de montrer que pour tout $a \in \mathfrak{a}$, la série de Taylor en a de $\Phi_{\mathfrak{a}}$ divise celle de $(X \cdot \Phi)|\mathcal{U} \cap \mathfrak{a}$.

Soit $a \in \mathfrak{a}$. On suppose que a n'est pas dans le centre de $\mathfrak{g}$ et on reprend les notations des sections 4 et 6; en particulier $\Phi|_{\mathfrak{q}^a} = \Phi^a \Psi^a$. L'orthogonal $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{q}^a$ dans $\mathfrak{q}$ relativement à κ est égal à $[a, \mathfrak{h}]$, l'espace tangent en a de la H -orbite de a .

On fixe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de a dans $\mathfrak{q}^a$ vérifiant les propriétés de la proposition 4.1, et on note $\mathcal{W} = \pi(H \times \mathcal{V})$. On suppose que $\det(\mathrm{ad} y)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^a} \neq 0$ et $\Psi^a(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathcal{V}$; en fait par construction $\mathcal{V}$ vérifie ces deux propriétés qui sont clairement équivalentes. La restriction de X à $\mathcal{V}$ s'écrit de façon unique comme somme d'un champ de vecteurs X^a sur $\mathcal{V}$ (à valeurs dans $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}^a$) et d'une application $Y^a \in C^\infty(\mathcal{V}, \mathfrak{m}_{\mathbb{C}})$. Il est clair que X^a est H^a -invariant, et que, pour tout $x \in \mathcal{V}$, l'espace tangent en x de la H -orbite de x contient $\mathfrak{m}$ (voir la preuve du lemme 4.3), donc $Y^a(x)$ est dans le complexifié de l'espace tangent à la H -orbite de x pour tout $x \in \mathcal{V}$. Il s'ensuit que pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathcal{W})^H$, $(X \cdot f)|_{\mathcal{V}} = X^a \cdot (f|_{\mathcal{V}})$. En particulier, $(X \cdot \Phi)|_{\mathcal{V}} = X^a \cdot (\Phi|_{\mathcal{V}})$.

L'hypothèse de récurrence implique que Φ^a divise $(X^a \cdot \Phi^a)|_{(\mathcal{V} \cap \mathfrak{a})}$. On a

$$(X \cdot \Phi)|_{\mathcal{V}} = X^a \cdot (\Phi|_{\mathcal{V}}) = X^a \cdot ((\Phi^a \Psi^a)|_{\mathcal{V}}) = (X^a \cdot (\Phi^a|_{\mathcal{V}}) \Psi^a + \Phi^a(X^a \cdot (\Psi^a|_{\mathcal{V}})),$$

donc, puisque $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}^x$, l'hypothèse de récurrence implique que Φ_a^a divise $(X \cdot \Phi)|_{(\mathcal{V} \cap \mathfrak{a})}$; et comme Ψ^a ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$, il en découle que Φ_a divise $(X \cdot \Phi)|_{(\mathcal{V} \cap \mathfrak{a})}$, et donc Φ_a divise la série de Taylor en a de $(X \cdot \Phi)|_{(\mathcal{U} \cap \mathfrak{a})}$.

On suppose maintenant que a est dans le centre de $\mathfrak{g}$. Alors Φ_a est un polynôme homogène en $x - a$ de degré d égal au cardinal de $\Delta_r(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, et invariant par $W(\mathfrak{a})$.

On note $\mathfrak{a}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{q}$ relativement à κ . On a $\mathfrak{q} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$, car la restriction de κ à $\mathfrak{a}$ est non dégénérée. La restriction de X à $\mathcal{U} \cap \mathfrak{a}$ s'écrit alors de façon unique comme somme d'un champ de vecteurs X_a sur $\mathcal{U} \cap \mathfrak{a}$ et d'une application $X^\perp \in C^\infty(\mathcal{U} \cap \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^\perp)$. L'espace tangent en $x \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ à sa H -orbite s'identifie à $\mathfrak{a}^\perp$, donc pour tout $f \in C^\infty(\mathcal{U})^H$, $X \cdot f(x) = X_a \cdot (f|_{\mathcal{U} \cap \mathfrak{a}})(x)$, et par densité de $\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ dans $\mathfrak{a}$, on obtient

$$(X \cdot f)|_{(\mathcal{U} \cap \mathfrak{a})} = X_a \cdot (f|_{\mathcal{U} \cap \mathfrak{a}}).$$

Rappelons la dérivation $T_a X$ de $\mathbb{C}[[\mathfrak{q}_a]]$ définie dans la section 3. Vue comme élément de $\mathbb{C}[[\mathfrak{q}_a]] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$, c'est une famille $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de champs de vecteurs sur $\mathfrak{q}$, chaque X_k est homogène en $x - a$ de degré k . Il est clair d'après leur définition que les X_k sont H^a -invariants. Cela montre que les composantes homogènes en $x - a$ de $T_a X_a$, qu'on note $X_{a,k}$, sont $W(\mathfrak{a})$ -invariants.

D'après la proposition 6.4 (ici $\Phi^a = \Phi$ et $W^a = W(\mathfrak{a})$), pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme R_k tel que $X_{a,k} \cdot \Phi_a = \Phi_a R_k$. Il est clair que ce polynôme est homogène en $x - a$ de degré $k - 1$; en particulier il est nul pour $k = 0$. On note $S = (S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ l'élément de $\mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]$ tel que $S_k = R_{k+1}$. Alors $T_a(X_a \cdot \Phi_a) = \Phi_a S$.

On a donc montré que la série de Taylor de $X_a \cdot \Phi_a$ en chaque point $a \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{a}$ est divisible par Φ_a . Il existe donc, d'après le théorème 3.1, une fonction $g_a \in C^\infty(\mathcal{U} \cap \mathfrak{a})$ telle que $X_a \cdot \Phi_a = \Phi_a g_a$. ■

La première partie du théorème 2.1 est une conséquence immédiate du lemme 7.1 et de la proposition 5.1.

8. Preuve de la seconde partie du théorème 2.1

On fixe un ouvert complètement H -invariant $\mathcal{U} \subset \mathfrak{q}$ et une dérivation $D \in \text{Der}(C^\infty(\mathcal{U})^H)$ qui laisse stable l'idéal $\Phi C^\infty(\mathcal{U})^H$.

On rappelle les générateurs homogènes $P_1, \dots, P_\ell$ de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}]^H$. Pour tout $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, on note $P_{i,\mathfrak{a}}$ la restriction de P_i à $\mathfrak{a}$, $1 \leq i \leq \ell$.

Soit $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$. Il découle du lemme 4.3 que $\nabla P_i(x) = \nabla P_{i,\mathfrak{a}}(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{a}_{\text{reg}}$, et donc, par densité de $\mathfrak{a}_{\text{reg}}$ dans $\mathfrak{a}$, que $\nabla P_i(x) = \nabla P_{i,\mathfrak{a}}(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{a}$; d'où l'on déduit facilement que

$$\nabla P_i \cdot P_j(x) = \nabla P_{i,\mathfrak{a}} \cdot P_{j,\mathfrak{a}} \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{a}.$$

D'après le théorème de restriction de Chevalley, les polynômes $P_{1,\mathfrak{a}}, \dots, P_{\ell,\mathfrak{a}}$ forment un système générateur de l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ invariants par $W(\mathfrak{a})$. Il découle alors de ([4], chapitre V, Â§5, proposition 5) qu'il existe une constante $c \neq 0$ telle que

$$\det(\nabla P_{i,\mathfrak{a}} \cdot P_{j,\mathfrak{a}}(x))_{1 \leq i,j \leq \ell} = c \Phi_{\mathfrak{a}}(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{a};$$

D'où

$$\det(\nabla P_i \cdot P_j(x))_{1 \leq i,j \leq \ell} = c \Phi(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{q}.$$

Donc, d'après les formules de Cramer, il existe des fonctions $\psi_1, \dots, \psi_\ell \in C^\infty(\mathcal{U})^H$ telles que

$$\Phi(D \cdot P_j) = \sum_{1 \leq i \leq \ell} \psi_i \nabla P_i \cdot P_j, \quad 1 \leq j \leq \ell.$$

Pour montrer la seconde partie du théorème 2.1, il suffit de prouver les deux assertions suivantes:

- (i) Pour tout $1 \leq i \leq \ell$, il existe $\varphi_i \in C^\infty(\mathcal{U})^H$ tel que $\psi_i = \Phi \varphi_i$.
- (ii) $D = D_X$, où $X = \sum_{1 \leq i \leq \ell} \varphi_i \nabla P_i$

On note $Y = \sum_{1 \leq i \leq \ell} \psi_i \nabla P_i$ et D_Y la dérivation qu'il induit sur $C^\infty(\mathcal{U})^H$. On va commencer par montrer que $\Phi D = D_Y$.

Lemma 8.1. *Soient $\mathcal{W} \subset \mathfrak{q}$ un ouvert complètement H -invariant et $\delta \in \text{Der}(C^\infty(\mathcal{W})^H)$. Pour tout $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, il existe une unique dérivation $\delta_{\mathfrak{a}} \in \text{Der}(C^\infty(\mathcal{W} \cap \mathfrak{a})^{\text{inv}})$ telle que*

$$\delta_{\mathfrak{a}}(f|(\mathcal{W} \cap \mathfrak{a})) = (\delta f)|(\mathcal{W} \cap \mathfrak{a}) \quad \text{pour tout } f \in C^\infty(\mathcal{W})^H.$$

Proof. On fixe $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$. L'application $f \mapsto f|(\mathcal{W} \cap \mathfrak{a})$ étant un morphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres surjectif de $C^\infty(\mathcal{W})^H$ sur $C^\infty(\mathcal{W} \cap \mathfrak{a})^{\text{inv}}$, il suffit de montrer que δ laisse stable son noyau.

Soit $x \in \mathcal{W} \cap \mathfrak{a}_{\text{reg}}$. D'après le corollaire 4.2, il existe $\chi \in C^\infty(\mathcal{W})^H$ égale à 1 dans un voisinage de x et de support inclus dans $\pi(H \times \mathfrak{a}_{\text{reg}})$ (notations de la proposition 4.1).

Soit $f \in C^\infty(\mathcal{W})^H$ telle que $f|(\mathcal{W} \cap \mathfrak{a})$ soit nulle. Alors χf est nulle. D'où

$$0 = \delta \cdot (\chi f)(x) = (\delta \cdot \chi)(x) f(x) + \chi(x) (\delta \cdot f)(x) = (\delta \cdot f)(x).$$

Donc $\delta \cdot f$ est nulle sur $\mathcal{W} \cap \mathfrak{a}_{\text{reg}}$; par suite $\delta \cdot f|(\mathcal{W} \cap \mathfrak{a})$ est nulle, car $\mathcal{W} \cap \mathfrak{a}_{\text{reg}}$ est dense dans $\mathcal{W} \cap \mathfrak{a}$. ■

Pour la dérivation D_Y , on voit facilement, d'après la discussion qui précède le lemme 8.1, que

$$(D_Y)_a = \sum_{1 \leq i \leq \ell} (\psi_i|_a) \nabla P_{i,a}. \quad (10)$$

Lemma 8.2. *On a $\Phi D = D_Y$.*

Proof. Il suffit de montrer que, pour tout $f \in C^\infty(\mathcal{U})^H$ et pour tout $x \in \mathcal{U}_{\text{reg}}$, on a $D \cdot f(x) = Y \cdot f(x)$.

Soit $x \in \mathcal{U}_{\text{reg}}$. On note $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}^x$; c'est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$. Les vecteurs $\nabla P_1(x), \dots, \nabla P_\ell(x)$ sont linéairement indépendants (voir [7], Théorème 13), il en est donc de même des vecteurs $\nabla P_{1,a}(x), \dots, \nabla P_{\ell,a}(x)$, car $\nabla P_i(x) = \nabla P_{i,a}(x)$ pour $1 \leq i \leq \ell$.

Le groupe H^x opère trivialement dans $\mathfrak{a}$. Il existe donc, d'après la proposition 4.1, un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de x dans $\mathfrak{a}$, inclus dans $\mathcal{U} \cap \mathfrak{a}_{\text{reg}}$, tel que $\mathcal{W} = \pi(H \times \mathcal{O})$ soit un ouvert totalement H -invariant de $\mathfrak{q}$, inclus dans $\mathcal{U}$, et l'application de restriction de $C^\infty(\mathcal{W})^H$ dans $C^\infty(\mathcal{O})$ soit un isomorphisme. La restriction de D à $C^\infty(\mathcal{W})^H$ (proposition 4.4), qu'on note $D^\mathcal{W}$, définit une dérivation $D_a^\mathcal{W}$ de $C^\infty(\mathcal{O})$ (lemme 8.1); cette dérivation s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{1 \leq i \leq \ell} f_i \nabla P_{i,a}$, $f_i \in C^\infty(\mathcal{O})$, car les vecteurs $\nabla P_{1,a}(y), \dots, \nabla P_{\ell,a}(y)$ forment une base de $\mathfrak{a}$ pour tout $y \in \mathcal{O}$.

Appliquant ceci aux fonctions $P_{1,a}, \dots, P_{\ell,a}$, on obtient pour tout $1 \leq j \leq \ell$

$$D_a \cdot P_{j,a}(y) = \sum_{1 \leq i \leq \ell} f_i \nabla P_{i,a} \cdot P_{j,a}(y) \quad \text{pour tout } y \in \mathcal{O}.$$

Donc les fonctions $\Phi_a f_i$ vérifient le même système linéaire que les fonctions $\psi_i|_a$ en tout $y \in \mathcal{O}$. Il en découle que $\psi_i|_a = \Phi_a f_i$, pour $i = 1, \dots, \ell$, et donc

$$\Phi D^\mathcal{W} \cdot f(x) = Y \cdot f(x) \quad \text{pour tout } f \in C^\infty(\mathcal{W})^H.$$

D'où

$$\Phi D \cdot f(x) = Y \cdot f(x) \quad \text{pour tout } f \in C^\infty(\mathcal{U})^H. \quad \blacksquare$$

Pour montrer l'assertion (i) de (9), il suffit, d'après la proposition 5.1, de prouver que, pour tout $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, les restrictions des ψ_i à $\mathfrak{a}$ sont divisibles par Φ_a .

Soit $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$. On note $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \mathfrak{a}$. Soit $a \in \mathcal{V}$. On reprend les notations de la section 6, en particulier l'ensemble $(q_1, \dots, q_\ell)$ de générateurs de $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]^{W_a}$ homogènes en $x - a$.

Lemma 8.3. *Il existe des polynômes m_{ij} , $1 \leq i, j \leq \ell$, dans $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]^{W_a}$ tels que, pour tout $1 \leq j \leq \ell$, on ait*

$$\nabla P_{j,a} = \sum_{1 \leq i \leq \ell} m_{ij} \nabla q_i.$$

De plus la matrice $(m_{ij})_{1 \leq i, j \leq \ell}$ est inversible dans $M(\ell, \mathbb{C}[[\mathfrak{a}_a]]^{W_a})$.

Proof. Comme les $\nabla P_{i,\mathbf{a}}$ sont $W(\mathbf{a})$ -invariants et donc $W(\mathbf{a})^a$ -invariants, l'existence des m_{ij} découle de [12].

On a déjà vu au cours de la preuve du lemme 6.1 qu'il existe des polynômes $Q_1, \dots, Q_\ell \in \mathbb{C}[\mathbf{q}^a]^{H^a}$ tels que $Q_i|_{\mathbf{a}} = q_i$. Il découle de la discussion qui suit le lemme 8.1 que, pour tout $1 \leq i \leq \ell$, la restriction à $\mathbf{a}$ de ∇Q_i , qu'on note $(\nabla Q_i)|_{\mathbf{a}}$, est égale à ∇q_i . On note M_{ij} l'unique polynôme H^a -invariant sur $\mathbf{q}^a$ tel que $M_{ij}|_{\mathbf{a}} = m_{ij}$. Les restrictions des ∇P_i à $\mathbf{q}^a$ sont à valeurs dans $\mathbf{q}_{\mathbb{C}}^a$ d'après le lemme 4.3; comme ces restrictions sont H^a -invariantes, il découle de la définition des M_{ij} que, pour tout $1 \leq j \leq \ell$,

$$\nabla P_j|_{\mathbf{q}^a} = \sum_{1 \leq i \leq \ell} M_{ij} \nabla Q_i.$$

On note $\mathbf{r}$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathbf{q}_{\mathbb{C}}$ (ce sont les éléments dont l'orbite sous $H_{\mathbb{C}}$ est de dimension maximale). D'après ([7], théorème 13), pour tout $x \in \mathbf{r}$, les vecteurs $\nabla P_1(x), \dots, \nabla P_\ell(x)$ sont linéairement indépendants. De même si l'on note $\mathbf{r}^a$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathbf{q}_{\mathbb{C}}^a$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments dont l'orbite sous $H_{\mathbb{C}}^a$ est de dimension maximale, alors pour tout $y \in \mathbf{r}^a$, les vecteurs $\nabla Q_1(y), \dots, \nabla Q_\ell(y)$ sont linéairement indépendants; comme $\mathbf{r} \cap \mathbf{q}_{\mathbb{C}}^a \subset \mathbf{r}^a$, cette propriété est en particulier vraie pour tout $y \in \mathbf{r} \cap \mathbf{q}_{\mathbb{C}}^a$. Il existe $n \in \mathbf{q}_{\mathbb{C}}^a$ nilpotent tel que $x = a + n \in \mathbf{r} \cap \mathbf{q}_{\mathbb{C}}^a$ (voir le début de la preuve du théorème 8 de [7]). Alors la matrice $(M_{ij}(x))$ est inversible. Mais comme ses éléments sont H^a -invariants, on a $M_{ij}(x) = M_{ij}(a)$; donc $\det(M_{ij})(a) \neq 0$, cela prouve que $\det(m_{ij})$ est inversible dans $\mathbb{C}[[\mathbf{a}]]^{W^a}$, et donc la matrice (m_{ij}) est inversible dans $M(\ell, \mathbb{C}[[\mathbf{a}]]^{W^a})$. ■

D'après le lemme 6.3 et la proposition 6.5, la dérivation $(D_{\mathbf{a}})_a$ de $\mathbb{C}[[\mathbf{a}_a]]^{W^a}$ est de la forme $\sum_{1 \leq i \leq \ell} S_i \nabla q_i$, $S_i \in \mathbb{C}[[\mathbf{a}_a]]^{W^a}$.

On considère la dérivation $\delta = \Phi_{\mathbf{a}} D_{\mathbf{a}}$ de $C^\infty(\mathcal{V})^{\text{inv}}$. Alors

$$\delta_a = \sum_{1 \leq i \leq \ell} \Phi_{\mathbf{a}} S_i \nabla q_i,$$

et, d'après (10), le lemme 8.2 et le lemme 8.3,

$$\begin{aligned} \delta_a &= \sum_{1 \leq j \leq \ell} (T_a(\psi_j|_{\mathbf{a}})) \nabla P_{j,\mathbf{a}} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq \ell} \left(\sum_{1 \leq i \leq \ell} (T_a(\psi_j|_{\mathbf{a}})) m_{ij} \nabla q_i \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq \ell} \left(\sum_{1 \leq j \leq \ell} m_{ij} (T_a(\psi_j|_{\mathbf{a}})) \right) \nabla q_i. \end{aligned}$$

Donc par unicité de l'écriture de δ_a (proposition 6.5), pour tout $1 \leq i \leq \ell$, on a

$$\Phi_{\mathbf{a}} S_i = \sum_{1 \leq j \leq \ell} m_{ij} T_a(\psi_j|_{\mathbf{a}}).$$

Comme la matrice (m_{ij}) est inversible dans $M(\ell, \mathbb{C}[[\mathbf{a}_a]]^{W^a})$, il en est de même de sa transposée. Les formules de Cramer montrent alors que $T_a(\psi_j|_{\mathbf{a}})$ est divisible par $\Phi_{\mathbf{a}}$ dans $\mathbb{C}[[\mathbf{a}_a]]^{W^a}$.

D'après le théorème 3.1, ce qui précède montre que, pour tout $1 \leq i \leq \ell$ et pour tout $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, la restriction de ψ_i à $\mathcal{U} \cap \mathfrak{a}$ est divisible par $\Phi_{\mathfrak{a}}$. Il existe donc, d'après la proposition 5.1, des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell \in C^\infty(\mathcal{U})^H$ telles que $\psi_i = \Phi \varphi_i$.

On pose $X = \sum_{1 \leq i \leq \ell} \varphi_i \nabla P_i$. Alors $Y = \Phi X$, donc $\Phi D = D_Y = \Phi D_X$ et il s'ensuit que $D = D_X$. L'unicité de X de la forme $\sum_{1 \leq i \leq \ell} \varphi_i \nabla P_i$ découle de la construction des φ_i .

9. Remarques

Remark 9.1. Soient $P_1, \dots, P_\ell$, ℓ le rang de $\mathfrak{g}$, un système minimal de générateurs homogènes de $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$. Il découle par exemple de ([2], corollaire 3.5) que si $\mathcal{U}$ est un ouvert complètement G -invariant de $\mathfrak{g}$, alors tout élément de $\mathfrak{X}(\mathcal{U})^G$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{1 \leq i \leq \ell} f_i \nabla P_i$, avec $f_i \in C^\infty(\mathcal{U})^G$. On note $\Phi = \det(\nabla P_i \cdot P_j)_{1 \leq i, j \leq \ell}$. Le théorème 2.1, appliqué au cas diagonal, se traduit ainsi: l'application $X \mapsto D_X$ de $\mathfrak{X}(\mathcal{U})^G$ dans $\text{Der}(C^\infty(\mathcal{U})^G)$ est un isomorphisme de $\mathfrak{X}(\mathcal{U})^G$ sur le sous-espace de $\text{Der}(C^\infty(\mathcal{U})^G)$ formé des dérivations qui préservent l'idéal engendré par Φ .

Remark 9.2. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert complètement H -invariant de $\mathfrak{q}$. On note $\mathcal{Z}(\mathcal{U})$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{X}(\mathcal{U})^H$ qui annulent tous les éléments de $C^\infty(\mathcal{U})^H$. C'est un sous- $C^\infty(\mathcal{U})^H$ -module de $\mathfrak{X}(\mathcal{U})^H$, et il découle du théorème 2.1 que $\mathcal{Z}(\mathcal{U})$ est un supplémentaire du sous-module $\sum_{1 \leq i \leq \ell} C^\infty(\mathcal{U})^H \nabla P_i$. On peut voir aussi que si $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})^H$, alors $X \in \mathcal{Z}(\mathcal{U})$ si et seulement si pour tout $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$ et pour tout $x \in \mathfrak{a}$, $X(x)$ appartient à l'orthogonal de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ relativement à κ . L'exemple suivant montre qu'en général $\mathcal{Z}(\mathcal{U})$ n'est pas engendré par des champs de vecteurs invariants à coefficients polynomiaux.

Exemple 9.3. Soient $G = \text{SL}(3, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ son algèbre de Lie et σ l'involution de G définie par

$$\sigma(M) = I_{2,1} {}^t M^{-1} I_{2,1}, \quad M \in \text{SL}(3, \mathbb{R}), \quad \text{où} \quad I_{2,1} = \text{diag}(1, 1, -1).$$

Le groupe des points fixes de σ est $SO(2, 1)$; on note H sa composante neutre.

La différentielle de σ , qu'on note encore σ , est définie par

$$\sigma(A) = -I_{2,1} {}^t A I_{2,1}, \quad A \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}).$$

Avec les notations de la section 2, on a

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & d \\ c & d & 0 \end{pmatrix}; b, c, d \in \mathbb{R} \right\}; \mathfrak{q} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ -c & -e & -(a+d) \end{pmatrix}; a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & -2x & 0 \\ -y & 0 & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbb{R} \right\};$$

c'est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$.

On note avec un indice $\mathbb{C}$ les complexifiés des objets définis ci-dessus; ainsi $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$, $H_{\mathbb{C}}$ l'ensemble des points fixes de $\sigma_{\mathbb{C}}$; $H_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à $SO(3, \mathbb{C})$, donc connexe. On note $M_{\mathbb{C}}$ le centralisateur de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $H_{\mathbb{C}}$. On a

$$M_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

D'où $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}^{M_{\mathbb{C}}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$.

D'après [7], l'ensemble $\mathfrak{X}_p(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^{H_{\mathbb{C}}}$ des champs de vecteurs à coefficients polynomiaux et $H_{\mathbb{C}}$ -invariants sur $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ est un $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$ -module libre de rang $\dim \mathfrak{q}_{\mathbb{C}}^{H_{\mathbb{C}}} = 2$. Pour être précis, dans [7] les auteurs considèrent l'action dans $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ du groupe $K_{\mathbb{C}}$, commutant de $\sigma_{\mathbb{C}}$ dans le groupe adjoint de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, mais cela n'a pas d'importance ici car le groupe $K_{\mathbb{C}}$ est connexe, et donc les champs de vecteurs polynomiaux invariants sous l'action de $H_{\mathbb{C}}$ ou sous l'action de $K_{\mathbb{C}}$ sont les mêmes. On en déduit que $\mathfrak{X}_p(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^{H_{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}} \nabla P_1 + \mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}} \nabla P_2$, où (P_1, P_2) est un système de générateurs homogènes de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$; ceci découle aussi de [11], car la paire $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ peut être vue comme la complexifiée d'une paire riemannienne symétrique non hermitienne (la représentation de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ est irréductible). En particulier, on a $\mathfrak{X}_p(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^{H_{\mathbb{C}}} \cap \mathcal{Z}(\mathfrak{q}) = \{0\}$.

Le centralisateur M de $\mathfrak{a}$ dans H est égal à

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

donc

$$\mathfrak{q}^M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ -y & 0 & -(x+z) \end{pmatrix}; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

On note v l'élément de $\mathfrak{q}^M$ correspondant à $x = 1$ et $y = z = 0$; il appartient à l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{q}$ relativement à κ .

Soit $x \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ et soit $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de x dans $\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ comme dans la proposition 4.1. Soit $\varphi \in C^\infty(\mathcal{V})$. L'application $y \mapsto \varphi(y)v$ se prolonge de façon unique en un élément X de $\mathfrak{X}(\mathcal{W})^H$, $\mathcal{W} = \pi(H \times \mathcal{V})$. Ce champ de vecteurs annule toutes les fonctions dans $C^\infty(\mathcal{W})^H$ et n'appartient pas au sous- $C^\infty(\mathcal{U})^H$ -module de $\mathfrak{X}(\mathcal{U})^H$ engendré par les champs de vecteurs invariants à coefficients polynomiaux.

References

- [1] Agricola, I., et R. Goodman, *The algebra of K -invariant vector fields on a symmetric space G/K* , Michigan Math. J. **51** (2003), 607–630.
- [2] Bouaziz, A., *Sur les distributions covariantes dans les algèbres de Lie réductives*, J. Funct. Anal. **257** (2009), 3203–3217.

- [3] Bourbaki, N., «Algèbre, Chapitres 4 à 7», Masson, Paris, 1981.
- [4] —, «Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6», Hermann, Paris, 1968.
- [5] Kamoun, N., *Fonctions indéfiniment différentiables invariantes sur l'espace tangent d'un espace symétrique*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **7** (1998), 293–311.
- [6] —, *Restrictions à un sous-espace de Cartan des fonctions C^∞ invariantes sur l'espace tangent d'un espace symétrique*, J. of Lie Theory **8** (1998), 311–324.
- [7] Kostant, B., and S. Rallis, *Orbits and representations associated with symmetric spaces*, Amer. J. Math. **93** (1971), 753–809.
- [8] Lafontaine, J., «Introduction aux variétés différentielles», Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [9] Malgrange, B., *Idéaux de fonctions différentiables et division des distributions*, dans «Distributions», Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2003, 1–21.
- [10] Raïs, M., *Champs de vecteurs invariants sur une algèbre de Lie réductive complexe*, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), 615–628.
- [11] Sliman-Bouattour, L., *Sur les champs de vecteurs invariants sur un espace hermitien symétrique*, C. R. Acad. Sci. Paris, **309**, Série I (1989), 439–442.
- [12] Solomon, L., *Invariants of finite reflexion groups*, Nagoya Math. J. **22** (1963), 57–64.
- [13] Schwarz, G. W., *Lifting smooth homotopies of orbit spaces*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **51** (1980), 37–135.
- [14] Trèves, F., “Topological vector spaces, distributions and kernels,” Academic Press, New-York, London, 1967.
- [15] Tauvel, P., and R. Yu, “Lie algebras and algebraic groups,” Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.
- [16] Varadarajan, V. S., “Harmonic analysis on real reductive groups,” Lect. Notes Math. **576**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

Abderrazak Bouaziz
 Université de Poitiers-CNRS
 Laboratoire de Mathématiques
 et Applications
 BP 30179
 86962 Futuroscope-Chasseneuil, France
 bouaziz@math.univ-poitiers.fr

Nouri Kamoun
 Faculté des Sciences de Monastir
 5019 Monastir, Tunisie
 nouri.kamoun@fsm.rnu.tn

Received February 10, 2014
 and in final form July 1, 2014