

## Transfert, cap-produit et dualité de Poincaré en homologie et cohomologie des groupes de Lie réels

Philippe Blanc

Communicated by A. Valette

**Abstract.** Let  $\mathbf{G}$  a real Lie group with finitely many connected components and let  $\Gamma$  be a cocompact subgroup of  $\mathbf{G}$ . We define the transfer from  $\Gamma$  to  $\mathbf{G}$  in the homological and cohomological theory of differentiable modules and we show that the Poincaré duality identifies homological restriction and cohomological transfer by proving a transfer formula.

*Mathematics Subject Classification 2010:* 57T10, 20J05, 57P10, 55R12.

*Key Words and Phrases:* Homology, transfer, Poincaré duality, real Lie groups.

**Résumé.** Soit  $\mathbf{G}$  un groupe de Lie réel ayant un nombre fini de composantes connexes, soit  $\Gamma$  un sous-groupe cocompact de  $\mathbf{G}$ , nous définissons le transfert de  $\Gamma$  à  $\mathbf{G}$  dans la théorie homologique et cohomologique des modules différentiables, nous montrons que la dualité de Poincaré identifie restriction homologique et transfert cohomologique en prouvant une formule de transfert.

*Mathematics Subject Classification 2010:* 57T10, 20J05, 57P10, 55R12.

*Key Words and Phrases:* Homology, transfer, Poincaré duality, real Lie groups.

### 1. Introduction

La notion de transfert a été introduite dans le cadre des groupes discrets par Irvin Schur en 1902 dans [16], la théorie de la cohomologie des modules différentiables par Hochschild et Mostow en 1962 dans [12], la théorie duale par D.Wigner et l’auteur en 1983 dans [4].

Les lettres  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{C}$  désignent respectivement les entiers naturels, les entiers relatifs, les nombres réels et les nombres complexes et  $\mathbf{G}$  désigne un groupe de Lie réel qui possède un nombre fini de composantes connexes.

Dans ce travail, nous faisons un usage systématique de  $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{E})$ , l’espace des formes différentielles infiniment différentiables de degré  $i$  sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ , le quotient de  $\mathbf{G}$  par un sous-groupe compact maximal  $\mathbf{K}$ , à valeurs dans un espace vectoriel localement convexe séparé et complet  $\mathbf{E}$  sur  $\mathbf{C}$ .

Le quotient de  $\mathbf{G}$  par  $\mathbf{K}$  est un variété contractile, ceci est prouvé dans G.Hochschild [11] théorème 3.1 page 201.

A tout  $\mathbf{G}$ -module différentiable  $\mathbf{M}$ , *confer* la définition 2.1, à chaque nombre entier  $i$  de  $\mathbf{N}$  nous associons l'homologie différentiable de degré  $i$  de  $\mathbf{G}$  à valeurs dans  $\mathbf{M}$ ,  $H_i(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  et la cohomologie différentiable de degré  $i$  de  $\mathbf{G}$  à valeurs dans  $\mathbf{M}$ ,  $H^i(\mathbf{G}, \mathbf{M})$ . Pour réaliser cette construction nous exhibons une résolution projective de  $\mathbf{M}$  avec les formes différentielles à support compact sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  à valeurs dans  $\mathbf{M}$  et une résolution injective de  $\mathbf{M}$  avec les formes différentielles sans condition de support.

Les espaces d'homologie sont les foncteurs dérivés du foncteur des coinvariants qui associe à tout module  $\mathbf{M}$  le plus grand quotient algébrique  $\mathbf{G}$ -invariant noté  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}}$  et défini par:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{G}} = \mathbf{M} / \{g_1 m_1 - m_1 + \cdots g_k m_k - m_k, \forall g_1, \cdots g_k \in \mathbf{G}, \forall m_1, \cdots m_k \in \mathbf{M}\}$$

Le sous-espace de  $\mathbf{M}$  constitué des sommes finies de différences de translatées figurant dans le quotient ci-dessus est noté  ${}_{\mathbf{G}}\mathbf{M}$ . Les espaces de cohomologie sont les foncteurs dérivés du foncteur des invariants qui associe à tout module  $\mathbf{M}$  le plus grand sous-espace  $\mathbf{G}$ -invariant  $\mathbf{M}^{\mathbf{G}}$ :

$$\mathbf{M}^{\mathbf{G}} = \{m \in \mathbf{M}, \forall g \in \mathbf{G}, g.m = m\}$$

Dans le transfert comme dans la dualité de Poincaré intervient  $\delta_{\mathbf{G}}$  le module du groupe: étant donné une mesure de Haar à gauche  $dg$ , c'est la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure de Haar à droite  $dg^{-1}$  par rapport à  $dg$ , où  $dg^{-1}$  est obtenue à partir de  $dg$  par passage à l'inverse. Un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\mathbf{G}$  est cocompact si la variété quotient  $\mathbf{G}/\Gamma$  est compacte, dans ce cas le transfert est bien défini, il est constitué de deux opérations duales sur tout  $\mathbf{G}$ -module différentiable  $\mathbf{M}$ :

- $\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}$  va de l'homologie du groupe  $\mathbf{G}$  vers celle de  $\Gamma$
- $\text{Tra}_{\Gamma}^{\mathbf{G}}$  de la cohomologie de  $\Gamma$  vers celle de  $\mathbf{G}$

Ces deux opérations résultent de l'intégration sur  $\mathbf{G}/\Gamma$  jointe à la torsion par les modules de  $\mathbf{G}$  et de  $\Gamma$ .

$$H_i(\mathbf{G}, \mathbf{M} \otimes \delta_{\mathbf{G}}) \xrightarrow{\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}} H_i(\Gamma, \mathbf{M} \otimes \delta_{\Gamma}) \quad H^i(\Gamma, \mathbf{M} \otimes \delta_{\Gamma}^{-1}) \xrightarrow{\text{Tra}_{\Gamma}^{\mathbf{G}}} H^i(\mathbf{G}, \mathbf{M} \otimes \delta_{\mathbf{G}}^{-1})$$

Pour établir une formule du transfert et présenter la dualité de Poincaré sous sa forme classique, nous aurons besoin d'un cap-produit, noté  $\cap$ , défini sur la (co)homologie de  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$ , deux  $\mathbf{G}$ -modules différentiables, il est construit à partir des formes différentielles sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ , sa formule superpose le produit extérieur  $\wedge$  sur les formes et le produit tensoriel projectif  $\hat{\otimes}$  sur les modules:

$$H_i(\mathbf{G}, \mathbf{M}) \times H^j(\mathbf{G}, \mathbf{N}) \xrightarrow{\cap} H_{i-j}(\mathbf{G}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$$

Il a des propriétés analogues au cap-produit en topologie algébrique, *confer* par exemple J.W. Milnor et J.D. Stasheff [13]. Pour tout sous-groupe fermé  $\Gamma$  de  $\mathbf{G}$ , la surjection de  $\mathbf{M}_{\Gamma}$  sur  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}}$  et l'injection de  $\mathbf{M}^{\mathbf{G}}$  dans  $\mathbf{M}^{\Gamma}$  induisent la restriction homologique et cohomologique:

$$H_i(\Gamma, \mathbf{M}) \xrightarrow{\text{Res}_{\Gamma}^{\mathbf{G}}} H_i(\mathbf{G}, \mathbf{M}) \quad H^i(\mathbf{G}, \mathbf{M}) \xrightarrow{\text{Res}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}} H^i(\Gamma, \mathbf{M})$$

Nous démontrons deux relations entre la restriction et le transfert, la seconde sera déterminante dans la suite:

- Si la restriction de  $\delta_G$  à  $\Gamma$  est égale à  $\delta_\Gamma$  alors  $\text{Tra}_\Gamma^G \text{Res}_G^\Gamma$  est la multiplication par le volume de  $\mathbf{G}/\Gamma$ .
- Sans condition sur  $\delta_G$  relative à  $\delta_\Gamma$ , pour tous  $\mathbf{G}$ -modules différentiables  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$ , les applications  $\text{Res}_\Gamma^G(\text{Tra}_\Gamma^\Gamma \cap \text{Id})$  et  $\text{Id} \cap \text{Tra}_\Gamma^G$ , qui sont à valeurs dans  $H_{i-j}(\mathbf{G}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$ , coïncident sur  $H_i(\mathbf{G}, \mathbf{M} \otimes \delta_G^{-1}) \times H^j(\Gamma, \mathbf{N} \otimes \delta_\Gamma)$ . C'est la formule du transfert.

La classe fondamentale et le module dualisant, *confer* K.S. Brown [6] dans le cas des groupes discrets, ont leurs analogues en homologie différentiable: le module dualisant est ici  $\delta_G^{-1}$  et  $s$  désignant la dimension de  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ , le fait que  $H_s(\mathbf{G}, \delta_G^{-1})$  soit canoniquement isomorphe à  $\mathbf{C}$  prouve l'existence et l'unicité de la classe fondamentale  $[\omega_G^f]$  dans  $H_s(\mathbf{G}, \delta_G^{-1})$ . La classe fondamentale est représentée dans l'espace  $\Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{C})$  par toute forme  $\omega_G^f$  qui vérifie:

$$\int_{\mathbf{G}/\mathbf{K}} \delta_G(x) \cdot \omega_G^f(xK) dx K = 1$$

Ceci posé, nous donnons une nouvelle démonstration de la dualité de Poincaré, établi dans [4] et reformulée dans [14], nous prouvons qu'elle est induite par le cap-produit avec la classe fondamentale:

$$H^i(\mathbf{G}, \mathbf{M}) \xrightarrow{[\omega_G^f] \cap} H_{s-i}(\mathbf{G}, \mathbf{M} \otimes \delta_G^{-1})$$

La preuve repose sur la description d'un isomorphisme explicite d'un complexe de formes différentielles sur un complexe de classes de formes différentielles à support compact et de son inverse. L'application simultanée de ces isomorphismes au groupe  $\mathbf{G}$  et à un sous-groupe cocompact  $\Gamma$  et la formule du transfert conduisent au diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} H^i(\Gamma, \mathbf{M} \otimes \delta_\Gamma) & \xrightarrow{[\omega_\Gamma^f] \cap} & H_{s-i}(\Gamma, \mathbf{M}) \\ \text{Tra}_\Gamma^G \downarrow & & \text{Res}_\Gamma^G \downarrow \\ H^i(\mathbf{G}, \mathbf{M} \otimes \delta_G) & \xrightarrow{[\omega_0^f, G] \cap} & H_{s-i}(\mathbf{G}, \mathbf{M}) \end{array}$$

Le point important est que le transfert appliqué à  $[\omega_G^f]$ , la classe fondamentale de  $\mathbf{G}$ , donne  $\omega_\Gamma^f$  la classe fondamentale de  $\Gamma$ .

La caractérisation de la classe de coïnvariance nulle, parmi les fonctions ou les formes infiniment différentiables à support compact, comme noyau d'une certaine intégrale intervient de façon cruciale dans toutes ces constructions.

Application: si  $\mathbf{G}$  est un groupe de Lie réductif réel et  $\Gamma$  parcourt les sous-groupes paraboliques de  $\mathbf{G}$ , les résultats de cet article constituent la première étape d'une étude de l'homologie de Hochschild de l'algèbre de Hecke  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C})$ .

Je tiens à remercier Jean-Luc Brylinski, Patrick Delorme, Alain Guichardet et Jean-Pierre Serre pour leur soutien durant l'élaboration de ce texte.

## 2. Homologie et cohomologie des modules différentiables

Nous notons  $\mathbf{C}$  le corps des nombres complexes,  $\mathbf{R}$  le corps des nombres réels,  $\mathcal{E}$  la catégorie des espaces vectoriels topologiques sur  $\mathbf{C}$  localement convexes et non nécessairement séparés.

Soit  $\mathbf{G}$  un groupe de Lie réel ayant un nombre fini de composantes connexes,  $\mathbf{K}$  un sous-groupe compact maximal de  $\mathbf{G}$ ,  $dg$  une mesure de Haar invariante à gauche sur  $\mathbf{G}$ ,  $dk$  une mesure biinvariante sur  $\mathbf{K}$ ,  $dg\mathbf{K}$  une mesure invariante à gauche sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  normalisée. Nous notons  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  l'espace des fonctions infiniment différentiables à support compact de  $\mathbf{G}$  dans  $\mathbf{C}$ . Les mesures sur  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  ainsi que  $\delta_G$  le module de  $\mathbf{G}$  satisfont aux relations suivantes:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbf{K}} dk = 1 \\ & - \forall f \in C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C}), \int_{\mathbf{G}} f(g) dg = \int_{\mathbf{G}/\mathbf{K}} \int_{\mathbf{K}} f(gk) dk dg \\ & - \int_{\mathbf{G}} f(g^{-1}) dg = \int_{\mathbf{G}} f(g) \delta_G(g) dg \\ & - \forall g_0 \in \mathbf{G}, \int_{\mathbf{G}} f(gg_0) dg = \int_{\mathbf{G}} \delta_G(g_0) f(g) dg \end{aligned}$$

Soit  $\mathbf{M}$  est un espace vectoriel dans  $\mathcal{E}$ , séparé et complet, l'espace  $C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  des fonctions infiniment différentiables sur  $\mathbf{G}$  à valeurs dans  $\mathbf{M}$  est topologiquement isomorphe à l'espace  $C^\infty(\mathbf{G}) \hat{\otimes} \mathbf{M}$  où  $\hat{\otimes}$  désigne le produit tensoriel projectif complété, confer A.Grothendieck [10].

Par contre, l'espace  $C_c^\infty(\mathbf{G}) \hat{\otimes} \mathbf{M}$  n'est pas en général isomorphe à l'espace  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  des fonctions infiniment différentiables à support compact, mais aux fonctions infiniment différentiables scalairement à support compact, sur ce point voir [10], chapitre II, page 82, § 3.3. Ceci peut expliquer que si  $P$  est projectif dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$ ,  $\mathbf{P} \hat{\otimes} \mathbf{M}$  n'est pas a priori projectif dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$ , contrairement au cas des modules injectif traité dans la proposition 2.1.

La notion d'équicontinuité utilisée ci-dessous se trouve dans [9] page 141.

**Définition 2.1.** Un  $\mathbf{G}$ -module différentiable est un espace vectoriel  $\mathbf{M}$  dans  $\mathcal{E}$ , séparé et complet muni d'un homomorphisme de groupes  $\rho$  de  $\mathbf{G}$  dans  $\text{Aut}(\mathbf{M})$  le groupe des automorphisme de  $\mathbf{M}$ . Pour tout  $g \in \mathbf{G}$  et tout  $m \in \mathbf{M}$  nous notons  $g.m$  le vecteur  $\rho(g)(m)$  qui définit l'action de  $g$  sur  $m$ , l'action  $\rho$  est soumise aux trois conditions suivantes:

- $D_1$ : l'action restreinte à une partie compacte de  $\mathbf{G}$  définit une famille équicontinue dans  $\text{Aut}(\mathbf{M})$ .
- $D_2$ : Pour tout  $m \in \mathbf{M}$  la fonction  $\iota_m : g \mapsto g.m$  est infiniment différentiable de  $\mathbf{G}$  dans  $\mathbf{M}$ .
- $D_3$ : L'application induite  $\iota_M : m \mapsto (g \mapsto g.m)$  de  $\mathbf{M}$  dans  $C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  est linéaire et continue, de plus la distribution de Dirac en l'élément neutre de  $\mathbf{G}$  est un inverse à gauche linéaire et continu.

Nous notons  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  la catégorie des  $\mathbf{G}$ -modules différentiables, les morphismes sont les applications  $\mathbf{C}$ -linéaires continues qui commutent à l'action de  $\mathbf{G}$ .

**Définition 2.2.** Les notions suivantes sont issues de la notion de catégories relatives:

- un module  $\mathbf{P}$  est projectif dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  si pour toute surjection  $\iota$  de  $\mathbf{V}$  sur  $\mathbf{U}$  de  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  admettant un inverse à droite  $\underline{\iota}$  dans  $\mathcal{E}$ , tout  $\mathbf{G}$ -morphisme  $\varphi$  de  $\mathbf{P}$  dans  $\mathbf{U}$  se relève en un  $\mathbf{G}$ -morphisme  $\underline{\varphi}$  de  $\mathbf{P}$  dans  $\mathbf{V}$ :  $\iota \underline{\varphi} = \varphi$
- un module  $\mathbf{I}$  est injectif dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  si pour toute injection  $\bar{\iota}$  de  $\mathbf{U}$  dans  $\mathbf{V}$

de  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  admettant un inverse à gauche  $\bar{i}$  dans  $\mathcal{E}$ , tout  $\mathbf{G}$ -morphisme  $\psi$  de  $\mathbf{U}$  dans  $\mathbf{I}$  se prolonge en un  $\mathbf{G}$ -morphisme  $\bar{\psi}$  de  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{I}$  :  $\bar{i}\psi = \bar{\psi}$

Notons que dans [4] ces modules sont appelés relativement projectifs et relativement injectifs eut égard aux hypothèses restrictives que nous faisons sur la surjection et l'injection en cause.

**Proposition 2.1.** *La catégorie des  $\mathbf{G}$ -modules différentiables satisfait aux deux propriétés de stabilité suivantes:*

- a) *Si  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  sont dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$ , le produit tensoriel projectif complété  $\mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N}$  sur lequel  $\mathbf{G}$  agit diagonalement est encore dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$ .*
- b) *Si  $\mathbf{I}$  est injectif dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  alors  $\mathbf{I} \hat{\otimes} \mathbf{M}$  est aussi injectif.*

**Preuve.** Preuve de a): montrons que  $\mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N}$  a la propriété  $D_1$  : soient  $\{\alpha_i, i \in I\}$  et  $\{\beta_j, j \in J\}$  deux familles équi continues d'automorphismes de  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  respectivement, alors la famille  $\{\alpha_i \hat{\otimes} \beta_j, (i, j) \in I \times J\}$  est une famille équi continue d'automorphismes de  $\mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N}$ . En effet, pour tout voisinage  $\mathbf{B}$  de 0 dans  $\mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N}$  que nous pouvons prendre de la forme  $\mathbf{B}_M \otimes \mathbf{B}_N$  où  $\mathbf{B}_M$  est un voisinage de 0 dans  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{B}_N$  un voisinage de 0 dans  $\mathbf{N}$ , il existe un voisinage  $\mathbf{B}_\alpha$  de 0 dans  $\mathbf{M}$  et un voisinage  $\mathbf{B}_\beta$  de 0 dans  $\mathbf{N}$  tels que:

$$\forall (i, j) \in I \times J, \alpha_i(\mathbf{B}_\alpha) \subset \mathbf{B}_M, \beta_j(\mathbf{B}_\beta) \subset \mathbf{B}_N$$

Il en résulte que:

$$(\alpha_i \hat{\otimes} \beta_j)(\mathbf{B}_\alpha \otimes \mathbf{B}_\beta) \subset \mathbf{B}_M \otimes \mathbf{B}_N$$

Ce qui établit l'équi continuité de la famille  $\{\alpha_i \hat{\otimes} \beta_j, (i, j) \in I \times J\}$ . Nous obtenons  $D_1$  en choisissant pour  $I$  et  $J$  une même partie compacte de  $\mathbf{G}$ .

Montrons que  $\mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N}$  a la propriété  $D_2$  : par hypothèse,  $\iota_m : (g \mapsto g.m) \in C^\infty(G, \mathbf{M})$  et  $\iota_n : (g \mapsto g.n) \in C^\infty(G, \mathbf{N})$ . De même  $\iota_M$  et  $\iota_N$  sont bien définies linéaires et continues, par passage au produit tensoriel projectif nous obtenons:

$$\iota_M \hat{\otimes} \iota_N : \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N} \rightarrow C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M}) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{N})$$

Il en résulte l'application:

$$\iota_{M \hat{\otimes} N} : \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N} \rightarrow C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$$

$$m \otimes n \mapsto (g \mapsto g.m \otimes g.n)$$

En effet les propriétés du produit tensoriel projectif vis à vis d'un espace de fonctions infiniment différentiables, confer A.Grothendieck [10] ainsi que le lemme 3.1, nous donne l'isomorphisme  $\tau$  ci-dessous:

$$C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M}) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{N}) \xrightarrow{\tau} C^\infty(\mathbf{G} \times \mathbf{G}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$$

Il suffit alors de composer  $\iota_M \hat{\otimes} \iota_N$  avec  $\tau$  et de restreindre à la diagonale de  $\mathbf{G}$  pour obtenir l'application  $\iota_{M \hat{\otimes} N}$  de  $\mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N}$  dans  $C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$ . Ce qui montre non seulement que  $\mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N}$  a la propriété  $D_2$  et mais aussi la première partie de  $D_3$ . Notons  $\delta_1^M$ ,  $\delta_1^N$  et  $\delta_1^{M \hat{\otimes} N}$ , les distributions de Dirac en 1 sur les fonctions

de  $\mathbf{G}$  à valeurs  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N}$  respectivement. L'application  $\iota_M \hat{\otimes} \iota_N$  composée avec l'isomorphisme ci-dessus et la restriction à la diagonale de  $\mathbf{G}$  coïncide avec l'application  $\iota_{M \hat{\otimes} N}$ . Il s'agit de montrer que  $\delta_1^{M \hat{\otimes} N}$  est un inverse à droite dans  $\mathcal{E}$  de  $\iota_{M \hat{\otimes} N}$ . Pour ceci nous aurons besoin d'un inverse à droite de la restriction à la diagonale qui est obtenu en choisissant une fonction  $u \in C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  telle que  $u(1) = 1$  et en posant:

$$\forall t \in C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N}), i_u(t)(x, y) = u(x^{-1}y)t(x)$$

Le composé de  $i_u$  avec l'isomorphisme  $\tau^{-1}$  et le produit tensoriel des distributions de Dirac  $\delta_1^M \hat{\otimes} \delta_1^N$  fournit un morphisme de  $\mathcal{E}$  qui coïncide avec  $\delta_1^{M \hat{\otimes} N}$ , l'inverse à droite de  $\iota_{M \hat{\otimes} N}$  est donc bien dans  $\mathcal{E}$ .

Preuve de b): nous savons, confer P.Blanc et D.Wigner [4], qu'un module  $\mathbf{I}$  est injectif dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  si et seulement si il est facteur direct dans  $C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{I})$ .

Il en résulte que  $\mathbf{I} \hat{\otimes} \mathbf{M}$  est facteur direct dans  $C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{I}) \hat{\otimes} \mathbf{M}$ . Mais  $C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{I}) \hat{\otimes} \mathbf{M}$  est isomorphe à  $C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{I} \hat{\otimes} \mathbf{M})$  puisque le produit tensoriel projectif est transitif et que  $C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{I})$  est isomorphe à  $C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C}) \hat{\otimes} \mathbf{I}$ . Le module  $\mathbf{I} \hat{\otimes} \mathbf{M}$  vérifie donc la condition nécessaire et suffisante d'injectivité de [4] et b) est démontré. Ceci termine la démonstration de la proposition 2.1. ■

Nous étudions ici deux foncteurs de  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  dans  $\mathcal{E}$ :

- le foncteur des invariants:

$$\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}^{\mathbf{G}} = \{m \in \mathbf{M}, \forall x \in \mathbf{G}, x.m = m\}$$

- le foncteur des coinvariants:

$$\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}_{\mathbf{G}} = \mathbf{M} / {}_{\mathbf{G}}\mathbf{M}$$

Ici  ${}_{\mathbf{G}}\mathbf{M}$  désigne le sous-espace de  $\mathbf{M}$  algébriquement engendré par les vecteurs  $g.m - m$  où  $g \in \mathbf{G}$  et  $m \in \mathbf{M}$ , qualifiés de vecteurs élémentaires dans toute la suite. Le quotient  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}}$  est un espace a priori non séparé. Ces foncteurs satisfont dans  $\mathcal{E}$  à la relation de dualité :

$$\text{Hom}(\mathbf{M}_{\mathbf{G}}, \mathbf{C}) = \text{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{C})^{\mathbf{G}}$$

La cohomologie d'un groupe de Lie a été introduite par Hochschild et Mostow dans [12], son homologie par l'auteur et D.Wigner dans [4] et [3].

**Définition 2.3.** Les foncteurs d'homologie et de cohomologie sont respectivement les foncteurs dérivés du foncteur des invariants et du foncteur des coinvariants.

Sous la condition que les résolutions projectives et les corésolutions injectives admises dans la catégorie  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  possèdent un homotopie contractante dans  $\mathcal{E}$ :

- l'homologie d'un module  $\mathbf{M}$  de  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  est l'homologie du complexe obtenue en supprimant le terme final  $\mathbf{M}$  d'une résolution projective de  $\mathbf{M}$  et en lui appliquant le foncteur des coinvariants. L'homologie en degré  $i$  est notée  $H_i(\mathbf{G}, \mathbf{M})$ .

- la cohomologie d'un module  $\mathbf{M}$  de  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  est la cohomologie du complexe obtenue en supprimant le terme initial  $\mathbf{M}$  d'une corrésolution injective de  $\mathbf{M}$  et en lui appliquant le foncteur des invariants. La cohomologie en degré  $i$  est notée  $H^i(\mathbf{G}, \mathbf{M})$ .

Deux résolutions projectives sont homotopes à l'identité, l'homologie est donc bien définie, il en va de même pour les corésolutions injectives et la cohomologie, sur ceci voir [3]. Il reste à montrer l'existence de ces deux théories, pour ceci nous allons construire une résolution projective et une corésolution injective naturellement attachées à tout module de  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$ . Rappelons que le groupe  $\mathbf{G}$  ayant un nombre fini de composantes connexes et  $\mathbf{K}$  étant un sous-groupe compact maximal de  $\mathbf{G}$ , la variété  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  est contractile, difféomorphe à  $\mathbf{R}^s$  où  $s$  désigne la dimension de  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ , [11] page 20. Nous introduisons les  $\mathbf{G}$ -modules suivants:

- $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  qui désigne l'espace des formes différentielles à support compact, infiniment différentiables de degré  $i$ ,  $0 \leq i \leq s$ , à valeurs dans un module  $\mathbf{M}$ .
- $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  qui désigne l'espace des formes différentielles à support quelconque, infiniment différentiables de degré  $i$ ,  $0 \leq i \leq s$ , à valeurs dans un module  $\mathbf{M}$ .

Nous faisons agir le groupe  $\mathbf{G}$  simultanément à gauche sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  et sur  $\mathbf{M}$ , cette action induit sur les formes à support compact et sur les formes à support quelconque, une structure de  $\mathbf{G}$ -module différentiable définie par la même formule:

$$\forall \omega^i \in \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}), \forall g \in \mathbf{G}, \forall xK \in \mathbf{G}/\mathbf{K}, \forall X_1, \dots, X_i \in T(\mathbf{G}/\mathbf{K})$$

$$g\omega^i(xK, X_1, \dots, X_i) = g.\omega^i(g^{-1}xK, T(g^{-1})(X_1), \dots, T(g^{-1})(X_i))$$

Nous établirons à la proposition 2.2 que ces modules suffisent pour définir les résolutions et les corrésolutions de  $\mathbf{M}$  souhaitées.

Les critères qui suivent sont des variantes d'un résultat d'analyse fonctionnelle établi avec D.Wigner, confer le théorème 1 page 260 de [4]: les fonctions infiniment différentiables à support compact sur un groupe de Lie  $\mathbf{G}$  sont d'intégrale nulle si et seulement si elles se décomposent en une somme finie de différences de translatées. Il est fondamental puisqu'il implique que l'homologie différentiable se calcule dans des espaces vectoriels topologiques séparés. Rappelons la terminologie attachée à la notion de coïnvariance:

**Définition 2.4.** Soit  $\mathbf{M}$  un  $\mathbf{G}$ -module différentiable, la classe de coïnvariance nulle dans  $\mathbf{M}$  est le sous-espace de  $\mathbf{M}$ , noté  ${}_{\mathbf{G}}\mathbf{M}$ , des vecteurs  $m$  tels qu'il existe un entier  $k$  dans  $\mathbf{N}$ ,  $g_1, \dots, g_k$  dans  $\mathbf{G}$ ,  $m_1, \dots, m_k$  dans  $\mathbf{M}$  avec la relation:

$$m = g_1 m_1 - m_1 + \dots + g_k m_k - m_k$$

Nous aurons besoin de quatre critères de coïnvariance, le premier implique essentiellement les suivants:

**Critère 2.1.** Nous notons  $\epsilon$  l'application d'intégration de  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  dans  $\mathbf{M}$  par rapport à  $dx$  une mesure sur  $\mathbf{G}$  invariante à gauche. Ici le groupe  $\mathbf{G}$  agit sur

$C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  par la translation à gauche sur  $\mathbf{G}$  et le suffixe  $\mathbf{G}$  désigne la classe de coïnvariance nulle pour cette action. On a l'égalité:

$$\text{Ker } \epsilon =_{\mathbf{G}} C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$$

**Preuve.** Elle consiste à démontrer le critère d'abord pour le groupe  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  et le groupe  $\mathbf{R}$ , puis l'appliquer aux sous-groupes à un paramètre de  $\mathbf{G}$ , enfin d'établir le résultat pour  $\mathbf{G}$  en remarquant en particulier que ce théorème s'étend à tout  $\mathbf{G}$ -fibré principal. ■

Soit  $\mathbf{K}$  est un sous-groupe compact maximal de  $\mathbf{G}$ , nous nous plaçons dans un cadre qui recouvre les espaces fibrés relatifs à  $T(\mathbf{G}/\mathbf{K})$  le fibré tangent à  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  et à  $T^*(\mathbf{G}/\mathbf{K})$  le fibré cotangent. Pour tout  $g$  dans  $\mathbf{G}$ , nous désignerons par  $T(g)$  l'application linéaire tangente à la translation à gauche par  $g$  dans  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ :

$$\forall xK \in \mathbf{G}/\mathbf{K}, T_{xK}(\mathbf{G}/\mathbf{K}) \xrightarrow{T(g)} T_{gxK}(\mathbf{G}/\mathbf{K})$$

Nous adoptons les définitions de L.Schwartz [15] page 140,  $\Gamma_c(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{E})$  désigne l'espace des sections infiniment différentiables à support compact d'un fibré  $\mathbf{E}$  sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ , de fibres isomorphes à un même espace vectoriel localement convexe séparé et complet  $\mathbf{E}_K$ . De plus, l'espace  $\mathbf{E}$  est muni d'une action infiniment différentiable de  $\mathbf{G}$  telle que:

$$\forall g \in \mathbf{G}, g \cdot \mathbf{E}_K = \mathbf{E}_{gK}$$

nous posons:

$$\forall (g, f) \in \mathbf{G} \times \Gamma_c(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{E}), gf(xK) = g.f(g^{-1}xK)$$

**Critère 2.2.** Soit  $f \in \Gamma_c(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{E})$ , si  $f$  vérifie l'équation intégrale:

$$\int_G x^{-1} \cdot f(xK) dx = 0$$

alors il existe  $(g_1, f_1) \cdots (g_l, f_l) \in \mathbf{G} \times \Gamma_c(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{E})$  tels que:

$$\forall xK \in \mathbf{G}/\mathbf{K}, f(xK) = g_1 f_1(xK) - f_1(xK) + \cdots g_l f_l(xK) - f_l(xK)$$

**Preuve.** L'équation intégrale ayant lieu dans  $\mathbf{E}_K$ , le critère 2.1 appliqué à la fonction  $\tilde{f}$  de  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{E}_K)$  définie par  $\tilde{f}(x) = x^{-1} \cdot f(x)$  nous donne la décomposition:

$$\forall x \in \mathbf{G}, \tilde{f}(x) = h_1(g_1^{-1}x) - h_1(x) + \cdots h_l(g_l^{-1}x) - h_l(x)$$

Où  $h_1, \cdots, h_l$  sont des fonctions dans  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{E}_K)$ .

Il en résulte l'égalité dans  $\mathbf{E}_{xK}$ :

$$f(xK) = x.h_1(g_1^{-1}x) - x.h_1(x) + \cdots x.h_l(g_l^{-1}x) - x.h_l(x)$$



L'intégration du second membre à droite sur  $\mathbf{K}$  a un sens puisque  $\mathbf{E}_K$  est conservé par l'action de  $\mathbf{K}$ , nous posons donc:

$$h^K(xK) = \int_K xk.h(xk)dk$$

La section définie par cette formule est bien dans l'espace  $\Gamma_c(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{E})$  et nous obtenons la décomposition cherchée:

$$f(xK) = g_1 h_1^K(x) - h_1^K(x) + \cdots g_l h_l^K(x) - h_l^K(x)$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Nous spécialisons le critère 2.2 à deux situations duales relatives à un  $\mathbf{G}$ -module différentiable  $\mathbf{M}$  fixé. Dans la première situation, le fibré  $\mathbf{E}$  est  $\Lambda^i(T(\mathbf{G}/\mathbf{K}) \otimes \mathbf{M})$ . Le groupe  $\mathbf{G}$  agit sur  $\Gamma_c(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \Lambda^i(T(\mathbf{G}/\mathbf{K}) \otimes \mathbf{M}))$  simultanément, sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  par translation à gauche, sur  $\Lambda^i(T(\mathbf{G}/\mathbf{K}))$  par son application linéaire tangente et enfin par l'action fixée sur  $\mathbf{M}$ .

**Critère 2.3.** Soit  $\gamma_i$  une section de  $\Gamma_c(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \Lambda^i(T(\mathbf{G}/\mathbf{K}) \otimes \mathbf{M}))$  qui vérifie l'équation intégrale:

$$\int_G x^{-1}.\gamma_i(xK)dx = 0$$

alors:

$$\gamma_i \in_G \Gamma_c(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \Lambda^i(T(\mathbf{G}/\mathbf{K}) \otimes \mathbf{M}))$$

Le critère 2.3 est utile pour construire un lien direct entre l'homologie différentiable et la  $(\mathfrak{g}, \mathbf{K})$ -homologie.

Dans la deuxième situation, le fibré  $\mathbf{E}$  est  $\Lambda^i(T^*(\mathbf{G}/\mathbf{K}) \otimes \mathbf{M})$ . Si  $x$  est un élément de  $\mathbf{G}$ , nous noterons  $T(x)$  l'application linéaire tangente de la translation à gauche par  $x$  sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ . L'espace  $\Gamma_c(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \Lambda^i(T^*(\mathbf{G}/\mathbf{K}) \otimes \mathbf{M}))$  n'est autre que  $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  l'espace des formes différentielles de degré  $i$  à support compact sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  à valeurs dans  $\mathbf{M}$ .

Si  $\omega_i$  est une forme différentielle de degré  $i$  sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ ,  $\omega_i(xK, X_1, \dots, X_i)$  désigne la valeur en  $xK$  de  $\omega_i$  sur les vecteurs tangents  $X_1(xK), \dots, X_i(xK)$ , où  $X_1, \dots, X_i$  sont  $i$  champs de vecteurs tangents à la variété  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ .

**Critère 2.4.** Soit  $\omega_i \in \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  qui vérifie:

$$\forall xK \in \mathbf{G}/\mathbf{K}, \forall X_1, \dots, X_i \in T(\mathbf{G}/\mathbf{K}), \int_G x^{-1}.\omega_i(xK, T(x)X_1, \dots, T(x)X_i) dx = 0$$

Alors:

$$\omega_i \in_G \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$$

Ce critère assure en particulier que l'espace des classes de formes qui calculent l'homologie est séparé, par ailleurs il est utilisé dans le lemme 3.4 pour montrer que l'application induite par la différentielle extérieure sur les chaînes et

les cochaines commute aux isomorphismes effectifs conduisant à l'isomorphisme de Poincaré.

Nous désignerons par  $d$  la différentielle extérieure: si  $\omega^i$  est une forme différentielle de degré  $i$  et  $X_1, \dots, X_{i+1}$  sont  $i+1$  champs de vecteurs tangents à  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ , la forme  $d\omega^i$  de degré  $i+1$  est définie par la formule:

$$\begin{aligned} d\omega^i(xK, X_1, \dots, X_{i+1}) = \\ \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^{j+1} X_j \omega^i(xK, X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{i+1}) + \\ \sum_{j < k} (-1)^{j+k} \omega^i(xK, [X_j, X_k], X_1, \dots, \hat{X}_j \dots \hat{X}_k \dots X_{i+1}) \end{aligned}$$

La même formule est valable si nous considérons une forme  $\omega_i$  à support compact. Nous désignerons par le symbole  $\underline{\epsilon}$  l'intégration sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  d'une forme à support compact de degré maximum:

$$\underline{\epsilon}(\omega_s) = \int_{G/K} \omega_s$$

Le symbole  $\bar{\epsilon}$  désignera l'application qui à un vecteur associe la 0-forme constante sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  de valeur ce vecteur:

$$\forall m \in \mathbf{M}, \forall xK \in \mathbf{G}/\mathbf{K},$$

$$\bar{\epsilon}(m)(xK) = m$$

Les applications  $d$ ,  $\underline{\epsilon}$  et  $\bar{\epsilon}$  ainsi définies, nous pouvons énoncer les deux lemmes de Poincaré.

**Lemme 2.1.** *a) Il existe dans  $\mathcal{E}$ , une famille d'applications de degré  $-1$  notée  $\underline{s}$  indexée par le degré  $i \in [0, s]$  qui définit une homotopie contractante sur le complexe des formes à support compact:*

$$0 \rightarrow \Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \xrightarrow[\underline{s}]{d} \dots \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \xrightarrow[\underline{s}]{d} \Omega_c^{i+1}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \dots \Omega_c^s(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \xrightarrow[\underline{s}]{\underline{\epsilon}} \mathbf{M} \rightarrow 0$$

Les relations d'homotopie contractante satisfaites par  $\underline{s}$  sont les suivantes:

$$\underline{s}d + d\underline{s} = 1$$

$$\underline{\epsilon}\underline{s} = 1$$

*b) Il existe dans  $\mathcal{E}$ , une famille d'applications de degré  $-1$  notée  $\bar{s}$  indexée par le degré  $i \in [0, s]$ , qui définit une homotopie contractante sur le complexe des formes :*

$$0 \rightarrow \mathbf{M} \xrightarrow[\bar{s}]{\bar{\epsilon}} \Omega^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \xrightarrow[\bar{s}]{d} \dots \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \xrightarrow[\bar{s}]{d} \Omega^{i+1}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \xrightarrow[\bar{s}]{d} \Omega^s(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \rightarrow 0$$

Les relations d'homotopie contractante satisfaites par  $\bar{s}$  sont les suivantes:

$$\bar{s}d + d\bar{s} = 1$$

$$\bar{s}\bar{\epsilon} = 1$$

**Preuve.** Le groupe  $\mathbf{G}$  a un nombre fini de composantes connexes, donc  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  est difféomorphe à la variété  $\mathbf{R}^s$ , sur ceci voir [11] page 201. Nous sommes ainsi ramenés à  $\mathbf{R}^s$ , une preuve du lemme de Poincaré pour les formes à support quelconque sur cette variété se trouve dans R.Bott et W. Tu [17] page 35 et page 39. Pour les formes à support compact, une démonstration à partir d'une formule explicite se trouve dans ma thèse [2], c'est la proposition 1.2 du chapitre III. ■

Sur le complexe des formes à support compact,  $\underline{s}$  est une famille d'opérateurs linéaires et continus qui, en degré  $i$ , applique  $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  dans  $\Omega_c^{i-1}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$ . En degré 0, l'opérateur  $\underline{s}$  est défini par le choix d'une forme  $\omega_s^n$  de degré  $s$ , d'intégrale 1 sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ :

$$\forall m \in \mathbf{M}, \underline{s}(m) = \omega_s^n \otimes m$$

Sur le complexe des formes sans condition de support,  $\bar{s}$  est une famille d'opérateurs linéaires et continus qui, en degré  $i$ , applique  $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  dans  $\Omega^{i-1}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$ .

En degré 0, l'opérateur  $\bar{s}$  est la mesure de Dirac en  $K$ , l'origine de  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  :

$$\bar{s}(\omega^0) = \omega^0(K), \forall \omega^0 \in \Omega^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$$

Dans le premier cas nous dirons que ce complexe de formes à support compact est une résolution de  $\mathbf{M}$ , dans le second que ce complexe de formes est une corésolution de  $\mathbf{M}$ .

**Proposition 2.2.** *Les complexe suivants sont respectivement une résolution projective et une corésolution injective du module  $\mathbf{M}$ :*

$$\Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \xrightarrow{d} \cdots \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \xrightarrow{d} \Omega_c^{i+1}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \xrightarrow{d} \cdots \Omega_c^s(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{M} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathbf{M} \xrightarrow{\bar{\epsilon}} \Omega^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \xrightarrow{d} \cdots \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \xrightarrow{d} \Omega^{i+1}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \xrightarrow{d} \cdots \Omega^s(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$$

**Preuve.** Du fait que la différentielle extérieure commute aux images réciproques, théorème 19.8 de L.W. Tu [17] page 195, l'image réciproque de l'action de  $\mathbf{G}$  sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  commute à  $d$ , par ailleurs l'action de  $\mathbf{G}$  sur  $\mathbf{M}$  n'intervenant pas dans la formule définissant  $d$ , elle commute aussi à  $d$ , ce qui implique que la différentielle extérieure est un  $\mathbf{G}$ -morphisme sur les formes pour l'action diagonale. La proposition résulte alors du lemme 2.1 et de la proposition 4.1 où  $\Gamma$  est égal au groupe  $\mathbf{G}$  lui-même. ■

**Corollaire 2.1.** *L'espace d'homologie de degré  $i$  du groupe  $\mathbf{G}$  à valeurs dans le module  $\mathbf{M}$ , noté  $H_i(\mathbf{G}, \mathbf{M})$ , est le sous-quotient dans  $\Omega_c^{s-i}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})_G$  de  $\text{Ker } d$  par  $\text{Img } d$ . L'espace de cohomologie de degré  $i$  du groupe  $\mathbf{G}$  à valeurs dans  $\mathbf{M}$ , noté  $H^i(\mathbf{G}, \mathbf{M})$ , est le sous-quotient dans  $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})^G$  de  $\text{Ker } d$  par  $\text{Img } d$ . Ceux sont respectivement les espaces d'homologie et de cohomologie en degré  $i$  des complexes:*

$$\Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})_G \xrightarrow{d} \cdots \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})_G \xrightarrow{d} \Omega_c^{i+1}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})_G \xrightarrow{d} \cdots \Omega_c^s(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})_G \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \Omega^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})^G \xrightarrow{d} \cdots \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})^G \xrightarrow{d} \Omega^{i+1}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})^G \xrightarrow{d} \cdots \Omega^s(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})^G$$

Nota bene: les classes d'homologie de degré  $i$  se représentent par des formes à support compact de degré  $s - i$ , alors que les classes de cohomologie de degré  $i$  se représentent par des formes de degré  $i$ . Le lemme suivant permettra entre autres au § 3 de calculer le module dualisant.

**Lemme 2.2.** *Le groupe  $\mathbf{G}$  agit ici sur l'espace  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  par translation à droite sur  $\mathbf{G}$ . Pour tout entier  $i$  dans  $[0, s]$ , il existe un isomorphisme de complexes  $\alpha$  de  $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C}))^G$  sur  $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{C})$ , d'inverse  $\alpha^{-1}$ , définis par les formules suivantes:*

$$\forall \omega^i \in \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C}))^G$$

$$\alpha(\omega^i)(xK, X_1, \dots, X_i) = \omega^i(xK, X_1, \dots, X_i, 1)$$

$$\forall \omega_i \in \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{C}), \forall t \in \mathbf{G},$$

$$\alpha^{-1}(\omega_i)(xK, X_1, \dots, X_i, t) = \omega_i(t^{-1}xK, T(t^{-1})X_1, \dots, T(t^{-1})X_i)$$

**Preuve.** Elle résulte du fait que l'application linéaire tangente en l'élément neutre de  $\mathbf{G}$ ,  $T(1)$ , est l'identité, par ailleurs la définition de l'action de  $\mathbf{G}$  sur  $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C}))$  se traduit par la formule d'invariance:

$$\forall \omega^i \in \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})^G, \forall g \in \mathbf{G}, \forall xK \in \mathbf{G}/\mathbf{K}, \forall X_1, \dots, X_i \in T(\mathbf{G}/\mathbf{K}), \forall t \in \mathbf{G}$$

$$\omega^i(xK, X_1, \dots, X_i, t) = g.\omega^i(g^{-1}xK, T(g^{-1})(X_1), \dots, T(g^{-1})(X_i), gt)$$

Par le même argument que dans la preuve de la proposition 2.2, les isomorphismes  $\alpha$  commutent à la différentielle extérieure. Ceci se traduit, en degré  $i$ , par la commutativité du diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{i-1}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C}))^G & \xrightarrow{d} & \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C}))^G \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ \Omega_c^{i-1}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{C}) & \xrightarrow{d} & \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{C}) \end{array}$$

D'où l'isomorphisme de complexes cherché. ■

Les remarques qui suivent sont inspirées d'une observation du rapporteur, elles décrivent un procédé classique en cohomologie, mais, à notre connaissance nouveau en homologie, pour établir les isomorphismes de van Est.

**Remarque 2.1.** Une façon de voir que  $H^i(\mathfrak{g}, \mathbf{K}, \mathbf{M})$ , la cohomologie de W.T. van Est [18], coïncide avec  $H^i(\mathbf{G}, \mathbf{M})$ , la cohomologie différentiable de G.Hochschild et G.D. Mostow [12], est de les relier entre elles par le complexe des formes différentielles invariantes.

Notons  $\iota$  l'isomorphisme canonique de  $T_K(\mathbf{G}/\mathbf{K})$  sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$  et  $\iota X$  l'image de  $X$  par cet isomorphisme. Le sous-groupe  $\mathbf{K}$  opère par la représentation adjointe sur  $\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$  et par la restriction de  $\mathbf{G}$  à  $\mathbf{K}$  de l'action de  $\mathbf{G}$  sur  $\mathbf{M}$ . En chaque degré  $i$ , la formule suivante définit un isomorphisme explicite  $u$  de l'espace  $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})^{\mathbf{G}}$  sur l'espace  $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \mathbf{M})$  :

$$\forall \omega^i \in \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})^{\mathbf{G}}$$

$$u(\omega^i)(\iota X_1(K) \wedge \cdots \iota X_i(K)) = \omega^i(K, X_1, \cdots X_i)$$

L'inverse de  $u$  est donné par la formule:

$$\forall \sigma^i \in \text{Hom}_{\mathbf{K}}(\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \mathbf{M})$$

$$u^{-1}(\sigma^i)(xK, X_1, \cdots X_i) = x.\sigma^i(\iota T(x^{-1})X_1(xK) \wedge \cdots \iota T(x^{-1})X_i(xK))$$

Ces isomorphismes apparaissent dans [12] page 386 et résultent de la formule d'invariance:

$$\forall g \in \mathbf{G}, \forall xK \in \mathbf{G}/\mathbf{K}$$

$$g.\omega^i(g^{-1}xK, T(g^{-1})X_1, \cdots T(g^{-1})X_i) = \omega^i(xK, X_1, \cdots X_i)$$

Ils commutent aux différentielles, le complexe  $(\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})^{\mathbf{G}}, d, i \geq 0)$  calcule  $H^i(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  et le complexe  $(\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \mathbf{M}), \partial, i \in [0, s])$  calcule  $H^i(\mathfrak{g}, \mathbf{K}, \mathbf{M})$ , donc les deux cohomologies coïncident. La lettre  $\partial$  désigne la différentielle définie par van Est dans [18].

**Remarque 2.2.** La  $(\mathfrak{g}, \mathbf{K})$ -homologie  $H_i(\mathfrak{g}, \mathbf{K}, \mathbf{M})$ , étudiée par J. Pichaud [14] coïncide avec l'homologie différentiable  $H_i(\mathbf{G}, \mathbf{M})$ , pour décrire celle-ci, nous choisissons comme résolution projective non pas les espaces de formes à support compact, mais les espaces  $\Gamma_c(\Lambda^i(T(\mathbf{G}/\mathbf{K}) \otimes \mathbf{M}))$  de sections à support compact du produit tensoriel des puissances extérieures du fibré tangent à  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  avec le fibré trivial  $\mathbf{M}$ .

L'action de  $\mathbf{G}$  sur l'espace  $\Gamma_c(\Lambda^i(T(\mathbf{G}/\mathbf{K}) \otimes \mathbf{M}))$  est définie par:

$$\forall g \in \mathbf{G}, \forall \gamma_i \in \Gamma_c(\Lambda^i(T(\mathbf{G}/\mathbf{K}) \otimes \mathbf{M})), g\gamma_i(xK) = (\Lambda^i T(g) \otimes g.)(\gamma_i(g^{-1}xK))$$

Nous obtenons dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  une nouvelle résolution projective de  $\mathbf{M}$  notée  $\Gamma_c(\Lambda(T(\mathbf{G}/\mathbf{K}) \otimes \mathbf{M}))$  et en chaque degré  $i$ , l'égalité:

$$H_i(\mathbf{G}, \mathbf{M}) = H_i(\Gamma_c(\Lambda(T(\mathbf{G}/\mathbf{K}) \otimes \mathbf{M}))_{\mathbf{G}})$$

Par définition, voir [14] page 225, nous avons l'égalité:

$$H_i(\mathfrak{g}, \mathbf{K}, \mathbf{M}) = H_i(\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \otimes \mathbf{M})_{\mathbf{K}}$$

Où  $\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \otimes \mathbf{M}_{\mathbf{K}}$  désigne le complexe des classes de coinvariance des  $\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \otimes \mathbf{M}$  sous l'action de  $\mathbf{K}$ , où  $k \in \mathbf{K}$  agit par  $\text{Ad}(k) \otimes k$ . Par ailleurs, le critère 2.3 implique l'existence d'un isomorphisme explicite  $v$  du complexe  $\Gamma_c(\Lambda(T(\mathbf{G}/\mathbf{K}) \otimes \mathbf{M}))_{\mathbf{G}}$  sur le complexe  $\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, \mathbf{M})_{\mathbf{K}}$  défini par la formule:

$$\forall \gamma_i \in \Gamma_c(\Lambda^i(T(\mathbf{G}/\mathbf{K}) \otimes \mathbf{M})), v(\gamma_i) = \int_{\mathbf{G}} (g^{-1}\gamma_i)(gK) dg$$

Choisissons une fonction  $\chi$  dans  $C_c^\infty(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{C})$  telle que:

$$\int_{G/K} \chi(xK) dxK = 1$$

L'inverse de  $v$  est définie de la manière suivante:

$$\forall X_1(K), \dots, X_i(K) \in \Lambda^i(T(\mathbf{G}/\mathbf{K})), \forall m \in \mathbf{M},$$

$$v^{-1}(\iota X_1(K) \wedge \dots \wedge \iota X_i(K) \otimes m)(xK) = \chi(xK) \cdot (T(x)X_1(K) \wedge \dots \wedge T(x)X_i(K) \otimes x.m)$$

Où l'espace  $T(\mathbf{G}/\mathbf{K})$  est identifié par  $\iota$  à  $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ , le quotient de l'algèbre de Lie de  $\mathbf{G}$  par l'algèbre de Lie de  $\mathbf{K}$ .

Insistons sur le fait que les espaces de champs de vecteurs tangents sont le cadre naturel pour formuler l'isomorphisme de van Est homologique, ceci évite de passer à chaque étape par l'isomorphisme de Poincaré entre une algèbre extérieure et sa duale.

### 3. Cap-produit, dualité de Poincaré et classe fondamentale

#### Le cap-produit

Si  $\omega_i$  est une forme différentielle de degré  $i$  sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  et  $X_1, \dots, X_i$  sont  $i$  champs de vecteurs tangents à la variété  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ , la valeur en  $xK$  de  $\omega_i$  sur les vecteurs tangents  $X_1(xK), \dots, X_i(xK)$  est notée  $\omega_i(xK, X_1, \dots, X_i)$ . Soit  $\mathfrak{S}_{i+j}$  le groupe des permutations de  $[1, \dots, i+j]$ , notons  $\mathfrak{S}_{i+j}^{i,j}$  le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_{i+j}$  défini par:

$$\mathfrak{S}_{i+j}^{i,j} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{i+j}, \sigma(1) < \dots < \sigma(i), \sigma(i+1) < \dots < \sigma(i+j)\}$$

A tous modules  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  dans la catégorie  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  et à toutes formes  $\omega_i$  et  $\omega^j$  dans  $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  et  $\Omega^j(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{N})$ , nous associons la forme à support compact de degré  $i+j$  à valeurs dans  $\mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N}$  définie par:

$$\begin{aligned} (\omega_i \oslash \omega^j)(xK, X_1, \dots, X_{i+j}) = \\ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{i+j}^{i,j}} \epsilon(\sigma) \omega_i(xK, X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)}) \otimes \omega^j(xK, X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(i+j)}) \end{aligned}$$

Où  $\epsilon(\sigma)$  désigne la signature de la permutation  $\sigma$ .

Le symbole  $\oslash$  indique que nous combinons le produit extérieur sur les variables avec le produit tensoriel sur les coefficients.

**Proposition 3.1.** *Le produit  $\oslash$  définit une application bilinéaire séparément continue de  $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \times \Omega^j(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{N})$  dans  $\Omega_c^{i+j}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$ .*

**Preuve.** En degré 0 le produit  $\oslash$  s'écrit:

$$(\omega_0 \oslash \omega^0)(xK) = \omega_0(xK) \otimes \omega^0(xK)$$

La preuve dans ce cas repose sur les deux lemmes qui suivent.

**Lemme 3.1.** Soient  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  deux variétés différentiables,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  deux espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés et complets, on pose:

$$\forall f \in C^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{M}), \forall g \in C^\infty(\mathbf{Y}, \mathbf{N}), \forall x \in \mathbf{X}, \forall y \in \mathbf{Y}$$

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x) \otimes g(y)$$

Cette formule induit une application  $\otimes$  de l'espace  $C^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{M}) \times C^\infty(\mathbf{Y}, \mathbf{N})$  dans l'espace  $C^\infty(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$  qui est bilinéaire continue.

**Preuve.** Par définition du produit tensoriel projectif défini par A.Grothendieck dans [10], il suffit de prouver que l'application  $\mathbf{C}$ -linéaire qui en résulte de  $C^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{M}) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbf{Y}, \mathbf{N})$  dans  $C^\infty(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$  est continue. Du bon comportement du produit tensoriel projectif vis à vis des espaces de fonctions différentiables, confer [10], découlent les isomorphismes topologiques suivants:

$$C^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{M}) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbf{Y}, \mathbf{N}) \simeq C^\infty(\mathbf{X}) \hat{\otimes} \mathbf{M} \hat{\otimes} C^\infty(\mathbf{Y}) \hat{\otimes} \mathbf{N} \simeq$$

$$C^\infty(\mathbf{X}) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbf{Y}) \hat{\otimes} \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N} \simeq C^\infty(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \hat{\otimes} (\mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N}) \simeq C^\infty(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$$

Ce qui prouve le lemme 3.1 . ■

**Lemme 3.2.** L'application  $\otimes$  de  $C_c^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{M}) \times C^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{N})$  dans  $C_c^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$  définie par  $(f \otimes g)(x) = f(x) \otimes g(x)$ , est bilinéaire séparément continue.

**Preuve.** Nous conservons les notations du lemme 3.1 et si  $C$  est un compact de  $\mathbf{X}$  nous notons  $C^\infty(\mathbf{X}, C, \mathbf{M})$  le sous-espace de  $C^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{M})$  des fonctions à support dans  $C$  muni de la topologie induite par celle de  $C^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ . Comme ici  $\mathbf{Y}$  est égal à  $\mathbf{X}$ , l'application  $\otimes$  du lemme 3.1 composée avec la restriction à la diagonale de  $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$  coïncide avec  $\otimes$ , elle applique  $C^\infty(\mathbf{X}, C, \mathbf{M}) \times C^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{N})$  dans  $C^\infty(\mathbf{X}, C, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$ , elle est bilinéaire continue puisque la restriction à la diagonale est une application continue et que  $C^\infty(\mathbf{X}, C, \mathbf{M})$  est muni de la topologie induite. Par passage à la limite inductive sur les compacts  $C$ , nous obtenons une application continue de  $\varinjlim C^\infty(\mathbf{X}, C, \mathbf{M}) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{N})$  dans  $\varinjlim C^\infty(\mathbf{X}, C, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$  mais le produit tensoriel projectif ne commute pas aux limites inductives, cependant chaque fois que nous fixons  $g \in C^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{N})$ , l'application de  $C_c^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{M})$  dans  $C_c^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$  qui à  $f$  associe  $f \otimes g$  est continue, de même, chaque fois que nous fixons  $f \in C_c^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{M})$  de support un certain compact  $C$  l'application de  $C^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{N})$  dans  $C_c^\infty(\mathbf{X}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$  qui à  $g$  associe  $f \otimes g$  est continue. Ceci démontre le lemme 3.2, à savoir la proposition 3.1 en degrés 0 . ■

Nous utilisons le lemme suivant pour démontrer la proposition en degré quelconque. Si  $\mathbf{X}$  est un champ de vecteurs de  $T_K(\mathbf{G}/\mathbf{K})$ ,  $X(K)$  désigne le vecteur de  $T_K(\mathbf{G}/\mathbf{K})$  identifié à un vecteur  $\iota X(K)$  de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ , le quotient de l'algèbre de Lie de  $\mathbf{G}$  par l'algèbre de Lie de  $\mathbf{K}$ .

**Lemme 3.3.** Ici le sous-groupe  $\mathbf{K}$  agit par la représentation adjointe sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ , il agit sur  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  et sur  $C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{N})$  par la translation à droite sur  $\mathbf{G}$ . Il existe deux isomorphismes explicites:

$$\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \xrightarrow{\beta_i} \text{Hom}_{\mathbf{K}}(\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M}))$$

$$\Omega^j(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{N}) \xrightarrow{\beta^j} \text{Hom}_{\mathbf{K}}(\Lambda^j(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{N}))$$

Ils sont définis par les formules:

$$\forall \omega_i \in \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}), \forall \omega^j \in \Omega^j(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{N}), \forall \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_i \in \mathfrak{g}/\mathfrak{k},$$

$$\beta_i \omega_i(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_i)(g) = \omega_i(gK, T(g)\mathfrak{p}_1, \dots, T(g)\mathfrak{p}_i)$$

$$\beta^j \omega^j(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_i)(g) = \omega^j(gK, T(g)\mathfrak{p}_1, \dots, T(g)\mathfrak{p}_j)$$

**Preuve.** Les isomorphismes inverses de  $\beta_i$  et  $\beta^j$  sont donnés pour tout  $\lambda_i$  dans  $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M}))$  et tout  $\lambda^j$  dans  $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\Lambda^j(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{N}))$  par les formules:

$$\forall \lambda_i \in \text{Hom}_{\mathbf{K}}(\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})), \forall \lambda^j \in \text{Hom}_{\mathbf{K}}(\Lambda^j(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{N}))$$

$$\beta_i^{-1}(\lambda_i)(gK, X_1, \dots, X_i) = \lambda_i(\iota T(g^{-1})X_1(gK), \dots, \iota T(g^{-1})X_i(gK))(g)$$

$$\beta^{j-1}(\lambda^j)(gK, X_1, \dots, X_j) = \lambda^j(\iota T(g^{-1})X_1(gK), \dots, \iota T(g^{-1})X_j(gK))(g)$$

Rappelons que  $\iota$  est l'isomorphisme canonique de  $T_K(\mathbf{G}/\mathbf{K})$  sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ . Ces isomorphismes sont décrits par J.Pichaud dans [14] page 222 pour les formes à support compact, la preuve découle d'un calcul direct. ■

Nous pouvons achever la preuve de la proposition 3.1 en transportant par ces isomorphismes le produit  $\otimes$ , celui-ci devient:

$$\lambda_i \otimes \lambda^j = \beta_{i+j}(\beta_i^{-1}(\lambda_i) \otimes (\beta^j)^{-1}(\lambda^j))$$

Le calcul direct de cette expression conduit à la formule explicite:

$$\forall \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_i \in \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, \forall g \in \mathbf{G},$$

$$(\lambda_i \otimes \lambda^j)(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_{i+j})(g) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{i+j}^{i,j}} \epsilon(\sigma) \lambda_i(\mathfrak{p}_{\sigma(1)}, \dots, \mathfrak{p}_{\sigma(i)})(g) \otimes \lambda^j(\mathfrak{p}_{\sigma(i+1)}, \dots, \mathfrak{p}_{\sigma(i+j)})(g)$$

Compte tenu du fait que si deux espaces  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  sont dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{K}}$  et si  $\mathbf{E}$  est de dimension finie,  $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  est isomorphe à  $\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{F}$ , le produit  $\otimes$  se décrit sur les espaces suivants:

$$(\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* \otimes_{\mathbf{K}} C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})) \times (\Lambda^j(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* \otimes_{\mathbf{K}} C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{N})) \xrightarrow{\otimes} \Lambda^{i+j}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* \otimes_{\mathbf{K}} C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$$

Le produit  $\otimes$  sur  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M}) \times C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{N})$  est séparément continu d'après le lemme 3.2. Par ailleurs le passage aux coïnvariants sous  $\mathbf{K}$  préserve la continuité. Ceci implique, par l'examen de la formule ci-dessus, que le produit  $\otimes$  transporté par les isomorphismes topologiques  $\beta$  est séparément continu et donc  $\otimes$  lui même, ce qui achève la preuve de la proposition 3.1. ■

**Proposition 3.2.** *L'application bilinéaire  $\otimes$  induit un produit des classes de coïnvariance de formes à support compact avec les formes invariantes:*

$$\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})_{\mathbf{G}} \times \Omega^j(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{N})^{\mathbf{G}} \xrightarrow{\otimes} \Omega^{i+j}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})_{\mathbf{G}}$$



**Preuve.** Nous ne traiterons que le cas des formes de degré 0, le cas général est seulement plus long à écrire.

$$\forall \omega_0 \in \Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}), \forall \omega^0 \in \Omega^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{N})^{\mathbf{G}}, \forall xK \in \mathbf{G}/\mathbf{K}, \forall g \in \mathbf{G}$$

$$(\omega_0 \otimes \omega^0)(xK) = \omega_0(xK) \otimes \omega^0(xK) \quad g.\omega^0(g^{-1}xK) = \omega^0(xK)$$

Calculons le produit d'une forme à support compact élémentaire  $(g\omega_0 - \omega_0)$  avec une forme invariante  $\omega^0$ :

$$\begin{aligned} (g\omega_0 - \omega_0) \otimes \omega^0(xK) &= \\ (g\omega_0 - \omega_0)(xK) \otimes \omega^0(xK) &= \\ g.\omega_0(g^{-1}xK) \otimes \omega^0(xK) - \omega_0(xK) \otimes \omega^0(xK) &= \\ g.(\omega_0(g^{-1}xK) \otimes \omega^0(g^{-1}xK)) - \omega_0(xK) \otimes \omega^0(xK) &= \\ g.(\omega_0 \otimes \omega^0)(g^{-1}xK) - (\omega_0 \otimes \omega^0)(xK) \end{aligned}$$

Il en résulte dans l'espace  $\Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$  l'identité suivante:

$$(g\omega_0 - \omega_0) \otimes \omega^0 = g(\omega_0 \otimes \omega^0) - \omega_0 \otimes \omega^0$$

Ce calcul, généralisé en tous degrés  $i$  et  $j$  montre que la classe de coïnvariance du produit d'une forme à support compact avec une forme invariante ne dépend que de la classe de coïnvariance de la forme à support compact. ■

**Proposition 3.3.** *La formule de la différentielle d'un produit extérieur s'étend à  $\otimes$ :*

$$d(\omega_i \otimes \omega^j) = d\omega_i \otimes \omega^j + (-1)^i \omega_i \otimes d\omega^j$$

**Preuve.** Le sous-espace de  $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  engendré par les formes  $\omega_i \otimes m$  où  $\omega_i \in \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{C})$  est dense dans  $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$ , de même le sous-espace engendré par  $\omega^j \otimes n$  où  $\omega^j \in \Omega^j(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{N})$  est dense dans  $\Omega^j(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{N})$ . Sur ces éléments décomposés le produit  $\otimes$  devient:

$$(\omega_i \otimes m) \otimes (\omega^j \otimes n) = (\omega_i \wedge \omega^j) \otimes (m \otimes n)$$

Il suffit donc de démontrer l'égalité pour ces formes, elles satisfont aux relations suivantes:

$$\begin{aligned} d(\omega_i \otimes m) &= d\omega_i \otimes m \\ d(\omega^j \otimes n) &= d\omega^j \otimes n \\ d(\omega_i \wedge \omega^j) &= d\omega_i \wedge \omega^j + (-1)^i \omega_i \wedge d\omega^j \end{aligned}$$

Compte tenu de ces relations nous avons la suite d'égalités:

$$\begin{aligned} d((\omega_i \otimes m) \otimes (\omega^j \otimes n)) &= \\ d((\omega_i \wedge \omega^j) \otimes (m \otimes n)) &= \\ (d\omega_i \wedge \omega^j + (-1)^i \omega_i \wedge d\omega^j) \otimes (m \otimes n) &= \\ (d\omega_i \wedge \omega^j) \otimes (m \otimes n) + (-1)^i (\omega_i \wedge d\omega^j) \otimes (m \otimes n) &= \\ (d\omega_i \otimes m) \otimes (\omega^j \otimes n) + (-1)^i (\omega_i \otimes m) \otimes (d\omega^j \otimes n) &= \\ d(\omega_i \otimes m) \otimes (\omega^j \otimes n) + (-1)^i (\omega_i \otimes m) \otimes d(\omega^j \otimes n) \end{aligned}$$

La formule de la différentielle du produit  $\otimes$  est ainsi démontrée sur les éléments décomposés et par densité sur toutes les formes. ■

Les propriétés suivantes résultent de la proposition 3.3:

$$\begin{aligned} d\omega_i &= 0, d\omega^j = 0 \Rightarrow d(\omega_i \otimes \omega^j) = 0 \\ \omega_i &= d\omega_{i-1}, d\omega^j = 0, d\omega_i = 0 \Rightarrow \omega_i \otimes \omega^j = d(\omega_{i-1} \otimes \omega^j) \\ \omega^j &= d\omega^{j-1}, d\omega_i = 0 \Rightarrow \omega_i \otimes \omega^j = (-1)^i d(\omega_i \otimes \omega^{j-1}) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc passer aux groupes d'homologie et de cohomologie.

**Définition 3.1.** Le cap-produit est induit à partir du produit  $\otimes$  sur les formes:

$$\Omega_c^{s-i}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})_G \times (\Omega^j(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{N})^G \xrightarrow{\otimes} \Omega_c^{s-i+j}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})_G$$

Nous notons  $\cap$ , le produit obtenu sur les espaces d'homologie et de cohomologie en passant aux foncteurs dérivés, cette application définit le cap-produit:

$$H_i(\mathbf{G}, \mathbf{M}) \times H^j(\mathbf{G}, \mathbf{N}) \xrightarrow{\cap} H_{i-j}(\mathbf{G}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$$

Par une méthode similaire et une formule identique, il est possible de définir le cup-produit qui portent uniquement sur les groupes de cohomologie. Les deux opérations sont adjointes l'une de l'autre conformément à K.S. Brown [6] page 113. L'adjonction détermine de manière unique le cap-produit une fois le cup-produit défini, confer J.W. Milnor et J.D. Stasheff [13] page 276 .

### La dualité de Poincaré

Le cap-produit ainsi construit, nous sommes en mesure de décrire l'isomorphisme de Poincaré comme le produit avec la classe fondamentale une fois celle-ci définie, le module dualisant est nécessaire à la formulation de cette version de la dualité de Poincaré.

La preuve repose, dans une première étape, sur la description d'un isomorphisme de complexes explicite, contrairement à celle de [4] qui résulte de la construction d'un bicomplexe et à celle de [14] qui passe par la  $(\mathfrak{g}, K)$ -cohomologie. La seconde étape consiste à dégager de cet isomorphisme explicite son expression comme cap-produit avec la classe fondamentale.

Choisissons une fonction  $\xi$  dans  $C_c^\infty(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{C})$  telle que:

$$\int_G \delta_G(x) \xi(xK) dx = 1$$

Nous construisons des application notées  $I_\delta$  de  $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  dans  $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_G)$  et en sens inverse des application notées  $S_\xi$  définies par les formules:

$$\begin{aligned} \forall i \in [0, s] \quad \forall \omega_i &\in \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \\ I_\delta(\omega_i) &= \int_G g^{-1} \omega_i dg \end{aligned}$$

Il est nécessaire de préciser le sens de cette formule:

$$I_\delta(\omega_i)(xK, X_1, \dots X_i) = \int_G g^{-1} \cdot \omega_i(gxK, T(g)X_1, \dots T(g)X_i) dg$$

Les applications en sens inverse notées  $S_\xi$  sont définies par la formule:

$$\begin{aligned} \forall i \in [0, s] \quad \forall \omega^i \in \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_G) \\ S_\xi(\omega^i) = \xi \cdot \omega^i \end{aligned}$$

Cette définition se traduit sur les variables par la formule:

$$S_\xi(\omega^i)(xK, X_1, \dots X_i) = \xi(xK) \cdot \omega^i(xK, X_1, \dots X_i)$$

**Lemme 3.4.** *En tout degré  $i$ , l'application  $I_\delta$  satisfait aux propriétés suivantes:*

- $I_\delta$  se factorise par  $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})_G$
- $I_\delta$  a pour image  $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_G)^G$
- $I_\delta$  a pour inverse la restriction de  $S_\xi$  à  $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_G)^G$
- $I_\delta$  et  $S_\xi$  commutent chacune aux différentielles extérieures

L'isomorphisme de complexes différentiels ainsi défini induit sur leurs espaces d'homologie et de cohomologie des isomorphismes notés encore  $I_\delta$  et  $S_\xi$ :

$$H_{s-i}(\mathbf{G}, \mathbf{M}) \xrightleftharpoons[S_\xi]{I_\delta} H^i(\mathbf{G}, \mathbf{M} \otimes \delta_G)$$

**Preuve.** Pour montrer que l'image de  $I_\delta$  est contenue dans  $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_G)^G$  calculons l'action d'un élément  $g_0$  de  $\mathbf{G}$  sur l'image:

$$\begin{aligned} g_0 I_\delta(\omega_i)(xK, X_1, \dots X_i) &= \\ g_0 \cdot \delta_G(g_0) \cdot I_\delta(\omega_i)(g_0^{-1}xK, T(g_0^{-1})X_1, \dots T(g_0^{-1})X_i) &= \\ g_0 \cdot \delta_G(g_0) \cdot \int_G g^{-1} \cdot \omega_i(gg_0^{-1}xK, T(g)T(g_0^{-1})X_1, \dots T(g)T(g_0^{-1})X_i) dg &= \\ \delta_G(g_0) \cdot \int_G g_0 g^{-1} \cdot \omega_i(gg_0^{-1}xK, T(gg_0^{-1})X_1, \dots T(gg_0^{-1})X_i) dg &= \\ \int_G g^{-1} \cdot \omega_i(gxK, T(g)X_1, \dots T(g)X_i) dg &= \\ I_\delta(\omega_i)(xK, X_1, \dots X_i) \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $g_0 I_\delta = I_\delta$ , autrement dit l'image de  $I_\delta$  est un sous-espace de l'espace des formes invariantes.

Pour montrer que l'application  $I_\delta$  se factorise à travers le quotient par les formes de coïnvariance nulle sous  $\mathbf{G}$  il suffit de montrer qu'elle s'annule sur les formes élémentaires:

$$\begin{aligned} \forall g_0 \in \mathbf{G} \quad \forall \omega_i \in \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \\ I_\delta(g_0 \omega_i) = \int_G g^{-1} g_0 \omega_i dg = \int_G g^{-1} \omega_i dg = I_\delta(\omega_i) \end{aligned}$$

Ceci implique que  $I_\delta$  s'annule sur la forme élémentaire  $g_0 \omega_i - \omega_i$  et par linéarité sur la classe de coïnvariance nulle sous  $\mathbf{G}$ .

Pour montrer que  $S_\xi$  est un inverse à droite de  $I_\delta$  il faut se restreindre aux formes invariantes, ceci résulte alors du calcul suivant:

$$\begin{aligned} \forall \omega^i &\in \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})^G, \\ I_\delta S_\xi(\omega^i)(xK, X_1, \dots, X_i) &= \int_G g^{-1} \xi \omega^i(xK, X_1, \dots, X_i) dg = \\ &= \int_G \xi(gxK) \cdot g^{-1} \cdot \omega^i(gxK, T(g)X_1, \dots, T(g)X_i) dg = \\ &= \int_G \delta_G(g) \cdot \xi(gxK) \cdot \omega^i(xK, X_1, \dots, X_i) dg = \\ &= \int_G \delta_G(g) \xi(gxK) dg \cdot \omega^i(xK, X_1, \dots, X_i) = \\ &= \int_G \delta_G(g) \xi(gK) dg \cdot \omega^i(xK, X_1, \dots, X_i) = \omega^i(xK, X_1, \dots, X_i) \end{aligned}$$

Pour montrer que  $S_\xi$  est un inverse à gauche de  $I_\delta$  nous explicitons l'image d'une forme  $\omega_i$  par  $S_\xi I_\delta$  et en montrant qu'elle est coïnvariante à  $\omega_i$  sous l'action de  $\mathbf{G}$ :

$$S_\xi I_\delta(\omega_i)(xK, X_1, \dots, X_i) = \xi(xK) \cdot \int_G g^{-1} \cdot \omega_i(gxK, T(g)X_1, \dots, T(g)X_i) dg$$

Nous appliquons le critère 2.4 de coïnvariance nulle à la forme  $S_\xi I_\delta(\omega_i) - \omega_i$ , il s'agit donc de montrer que:

$$\int_G x^{-1} (S_\xi I_\delta(\omega_i) - \omega_i) dx = 0$$

Par définition cette condition est équivalente à:

$$\forall xK \in \mathbf{G}/\mathbf{K}, \forall X_1, \dots, X_i \in T(\mathbf{G}/\mathbf{K})$$

$$\int_G x^{-1} \cdot (S_\xi I_\delta(\omega_i) - \omega_i)(xK, T(x)X_1, \dots, T(x)X_i) dx = 0$$

Calculons le terme en  $S_\xi I_\delta$  dans cette intégrale:

$$\begin{aligned} &\int_G x^{-1} \cdot S_\xi I_\delta(\omega_i)(xK, T(x)X_1, \dots, T(x)X_i) dx = \\ &= \int_G x^{-1} \cdot (\xi(xK) \cdot \int_G g^{-1} \cdot \omega_i(gxK, T(g)X_1, \dots, T(g)X_i) dg) dx = \\ &= \int_G \int_G x^{-1} g^{-1} \cdot (\xi(xK) \cdot \omega_i(gxK, T(g)X_1, \dots, T(g)X_i)) dg dx = \\ &= \int_G \int_G h^{-1} \cdot (\xi(xK) \cdot \omega_i(hK, T(h)X_1, \dots, T(h)X_i)) \delta_G(x) dh dx = \\ &= \int_G \xi(xK) \cdot \delta_G(x) dx \cdot \int_G h^{-1} \cdot \omega_i(hK, T(h)X_1, \dots, T(h)X_i) dh = \\ &= \int_G h^{-1} \cdot \omega_i(hK, T(h)X_1, \dots, T(h)X_i) dh \end{aligned}$$

Nous avons effectué un changement sur la variable  $g$  qui devient  $h = gx$  dans la double intégrale, il s'en suit que:

$$\int_G g^{-1} S_\xi I_\delta(\omega_i) dg = \int_G h^{-1} \omega_i dh$$

La forme  $S_\xi I_\delta(\omega_i) - \omega_i$  vérifie donc le critère 2.4 de coïnvariance à 0 :

$$\int_G g^{-1} (S_\xi I_\delta(\omega_i) - \omega_i) dg = 0$$

Ceci implique que  $S_\xi I_\delta$  se réduit à l'application identique sur  $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})_G$  et donc que  $S_\xi$  est un inverse à droite de  $I_\delta$  sur les coïnvariants.

Montrons que  $S_\xi$  commute à la différentielle extérieure  $d$ , ce qui entraîne que son inverse  $I_\delta$  commute aussi à  $d$  :

$$dS_\xi(\omega^i) = d\xi \wedge \omega^i + \xi \cdot d\omega^i = d\xi \wedge \omega^i + S_\xi(d\omega^i)$$

Il s'agit donc de montrer que  $d\xi \wedge \omega^i$  est coïnvariante à 0 dans  $\Omega_c^{i+1}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})_G$ , or d'après le critère 2.4 c'est le cas si et seulement si:

$$\int_G g^{-1} (d\xi \wedge \omega^i) dg = 0$$

Les égalités suivantes sont satisfaites:

$$\begin{aligned} \int_G g^{-1} (d\xi \wedge \omega^i) dg &= \int_G g^{-1} d\xi \wedge \delta(g) \cdot g^{-1} \omega^i dg = \\ \int_G dg^{-1} \xi \wedge \delta(g) \cdot g^{-1} \omega^i dg &= \left( \int_G \delta(g) \cdot g^{-1} d\xi dg \right) \wedge \omega^i = \\ (d \int_G \delta(g) \cdot g^{-1} \xi dg) &\wedge \omega^i \end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que si nous considérons sur le fibré trivial  $\mathbf{G} \times \mathbf{G}/\mathbf{K}$  de base  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  la fonction qui au couple  $(g, xK)$  associe  $\xi(gxK)$  est à support compact sur les fibres au sens de [8] §4 7.10 page 295. Or l'intégration sur les fibres commute dans ce cas à la différentielle extérieure confer [8] §5 7.13 page 304.

Par ailleurs l'hypothèse faite sur  $\xi$  conduit aux égalités:

$$\begin{aligned} \int_G \delta(g) \cdot g^{-1} \xi dg(xK) &= \int_G \delta(g) \cdot g^{-1} \xi(xK) dg = \\ \int_G \delta(g) \cdot \xi(gxK) dg &= \int_G \delta(g) \cdot \xi(gK) dg = 1 \end{aligned}$$

La différentielle d'une fonction constante étant nulle, le critère 2.4 est vérifié par  $d\xi \wedge \omega^i$  pour tout  $\omega^i$  dans  $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_G)^G$ .

Nous venons de construire un isomorphisme de Poincaré explicite. ■

### Le module dualisant

Ce qui suit est un aparté concernant la relation entre le module dualisant d'un groupe discret et celui intervenant dans notre travail. Soit  $\Gamma$  un groupe discret, dans  $\mathcal{A}_\Gamma$  la catégorie des  $(\Gamma, \mathbf{Z})$ -modules, à savoir les groupes abéliens munis d'une action de  $\Gamma$ , R.Bieri et B.Eckmann dans [1] page 103 définissent le module dualisant  $\mathbf{D}$  comme l'anneau  $\mathbf{Z}$  muni d'une action de  $\Gamma$  telle qu'il existe un entier  $n$  dans  $\mathbf{N}$  et des isomorphismes de groupes abéliens:

$$H^k(\Gamma, \mathbf{A}) \rightleftharpoons H_{n-k}(\Gamma, \mathbf{D} \otimes \mathbf{A})$$

Dans [6] page 182, K.S. Brown définit a priori le module dualisant comme le groupe  $H^n(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma])$  muni de l'action induite par la translation à droite sur  $\mathbf{Z}[\Gamma]$  et montre que ces deux notions coïncident. Il est instructif de transposer cette notion de la catégorie  $\mathcal{A}_\Gamma$  à la catégorie  $\mathcal{D}_\mathbf{G}$ .

Il découle du lemme 3.4 qu'au module  $\mathbf{Z}$  correspond  $\delta_G^{-1}$  l'inverse du module de  $\mathbf{G}$ , par ailleurs au module  $H^n(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma])$  nous associons le module  $H^s(\mathbf{G}, C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C}))$  sur lequel  $\mathbf{G}$  agit à droite par l'action induite de la translation à droite sur  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  tordue par  $\delta_G^{-1}$ . Il s'agit de faire coïncider les deux notions dans le cas différentiable.

**Lemme 3.5.** *L'espace  $H^s(\mathbf{G}, C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C}))$ , muni de l'action à droite définie ci-dessus, est un module différentiable qui coïncide avec  $\delta_G^{-1}$  le module de  $\mathbf{G}$ .*

**Preuve.** - Nous appliquons le lemme 3.4 en degré  $s$  au module  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C})$ , ceci nous fournit un isomorphisme de  $H^s(\mathbf{G}, C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C}))$  sur  $H_0(\mathbf{G}, C_c^\infty(\mathbf{G}, \delta_G^{-1}))$  qui préserve l'action par translation à droite sur  $\mathbf{G}$  tordue par  $\delta_G^{-1}$ . Par ailleurs le critère 2.1 appliqué au  $\mathbf{G}$ -module  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \delta_G^{-1})$  identifie  $H_0(\mathbf{G}, C_c^\infty(\mathbf{G}, \delta_G^{-1}))$  au  $\mathbf{G}$ -module  $\delta_G^{-1}$ , en effet:

$$\begin{aligned} \forall f \in C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C}), \forall g \in \mathbf{G}, \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) \cdot (fg)(x) dx &= \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) \cdot \delta_G^{-1}(g) \cdot f(xg^{-1}) dx = \\ \int_{\mathbf{G}} \delta_G(xg^{-1}) \cdot f(xg^{-1}) dx &= \delta_G^{-1}(g) \cdot \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

L'action de  $\mathbf{G}$  par translation à droite sur  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \delta_G)$  se transporte donc par isomorphismes de  $H^s(\mathbf{G}, C_c^\infty(\mathbf{G}, \delta_G))$  à  $\mathbf{C}$  en la multiplication par  $\delta_G^{-1}$ , une autre méthode consisterait à appliquer le lemme 2.2. ■

### La classe fondamentale

Le lemme suivant permet de définir la classe fondamentale attachée aux  $\mathbf{G}$ -modules infiniment différentiables.

**Lemme 3.6.** *Soit  $\nu$  l'application de  $\Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \delta_G^{-1})$  dans  $\mathbf{C}$  définie par:*

$$\nu(\omega_0) = \int_{\mathbf{G}/\mathbf{K}} \delta_G(x) \omega_0(xK) dx K$$

L'application  $\nu$  induit un isomorphisme  $\underline{\nu}$  de  $H_s(\mathbf{G}, \delta_G^{-1})$  sur  $\mathbf{C}$ .

**Preuve.** Du lemme 3.4 appliqué en degrés 0 et 1, nous extrayons le diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} \Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \delta_G^{-1})_G & \xrightarrow{d} & \Omega_c^1(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \delta_G^{-1})_G \\ I_\delta \downarrow & & I_\delta \downarrow \\ \Omega^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{C})^G & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{C})^G \end{array}$$

Dans ce diagramme, la différentielle du bas a pour image 0 puisque les formes invariantes de degré 0 sont les fonctions constantes, la différentielle du haut a donc aussi pour image 0 puisque  $I_\delta$  est un isomorphisme, l'espace  $H_s(\mathbf{G}, \delta_G^{-1})$  étant par définition le noyau de la différentielle du haut nous obtenons l'égalité:

$$H_s(\mathbf{G}, \delta_G^{-1}) = \Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \delta_G^{-1})_G$$

L'application  $\nu$  est la composée de  $I_\delta$  avec l'évaluation en  $\mathbf{K}$  sur  $\Omega^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{C})^G$ , le passage de  $\nu$  aux classes de coïnvariance se justifie par le fait que  $\nu$  s'annule sur les formes élémentaires  $(g\omega_0 - \omega_0)$ , en effet:

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathbf{G}, \forall \omega_0 \in \Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \delta_G^{-1}), \nu(g\omega_0) &= \int_{\mathbf{G}/\mathbf{K}} \delta_G(xK) g\omega_0(xK) dxK = \\ \int_{\mathbf{G}/\mathbf{K}} \delta_G(xK) \delta_G^{-1}(g) \omega_0(g^{-1}xK) dxK &= \int_{\mathbf{G}/\mathbf{K}} \delta_G(g^{-1}xK) \omega_0(g^{-1}xK) dxK = \\ \int_{\mathbf{G}/\mathbf{K}} \delta_G(xK) \omega_0(xK) dxK &= \nu(\omega_0) \end{aligned}$$

Ce calcul montre que:  $\nu(g\omega_0 - \omega_0) = 0$

Donc  $\nu$  s'annule sur la classe de coïnvariance nulle, d'où l'existence d'une application induite  $\underline{\nu}$  sur  $\Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \delta_G^{-1})_G$ .

Montrons que  $\nu$  est surjective.

Fixons-nous  $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  telle que  $\int_{\mathbf{G}} \chi(x) dx = 1$ , et posons:

$$\forall z \in \mathbf{C}, s_\chi(z)(xK) = z \delta_G^{-1}(xK) \int_K \chi(xk) dk$$

Cette formule définit une application  $s_\chi$  de  $\mathbf{C}$  dans  $\Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \delta_G^{-1})$  qui est un inverse à droite de  $\nu$ , en effet:

$$\nu s_\chi(z) = \int_{\mathbf{G}/\mathbf{K}} \delta_G(xK) z \delta_G^{-1}(xK) \int_K \chi(xk) dk dxK = z \int_{\mathbf{G}/\mathbf{K}} \int_K \chi(xk) dk dxK = z$$

Il en résulte que  $\underline{\nu}$  est surjective, par ailleurs le fait que  $\underline{\nu}$  soit injective de  $\Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \delta_G^{-1})_G$  dans  $\mathbf{C}$  résulte du critère 2.1. Comme l'homologie en degré  $s$  de  $\delta_G^{-1}$  est égale à  $\Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \delta_G^{-1})_G$ , confer le début de la preuve,  $\underline{\nu}$  définit un isomorphisme de  $H_s(\mathbf{G}, \delta_G^{-1})$  sur l'espace vectoriel topologique  $\mathbf{C}$ , ce qui achève la preuve du lemme 3.6. ■

**Définition 3.2.** La classe fondamentale attachée à la théorie de l'homologie différentiable est par définition la classe de  $H_s(\mathbf{G}, \delta_G^{-1})$  qui a pour image 1 par l'isomorphisme naturel de  $H_s(\mathbf{G}, \delta_G^{-1})$  sur  $\mathbf{C}$  décrit dans le lemme 3.6. Nous noterons  $\omega_G^f$  une représentante de la classe fondamentale dans  $\Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \delta_G^{-1})$  elle vérifie la condition:

$$\nu(\omega_G^f) = 1$$

**Proposition 3.4.** Etant donné  $S_\xi$  l'isomorphisme défini dans le lemme 3.4, il existe  $\omega_0^f \in \Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \delta_G^{-1})$  une représentante de la classe fondamentale tel que pour tout module  $\mathbf{M}$  de  $\mathcal{D}_\mathbf{G}$  et toute forme  $\omega^i \in \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  l'égalité suivante est vérifiée:

$$S_\xi(\omega^i) = \omega_G^f \otimes \omega^i$$

**Preuve.** Explicitons la définition des deux termes.

$$S_\xi(\omega^i)(xK, X_1, \dots, X_i) = \delta_G^{-1}(xK) \xi(xK) \omega^i(xK, X_1, \dots, X_i)$$

$$\omega_G^f \otimes \omega^i(xK, X_1, \dots, X_i) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_i^{o,i}} \epsilon(\sigma) \omega_G^f(xK) \omega^i(xK, X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)})$$

Pour montrer que les membres de droite de ces deux formules coïncident en tout point  $xK \in \mathbf{G}/\mathbf{K}$  et tout champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_i$  de  $T(\mathbf{G}/\mathbf{K})$ , nous remarquons que la définition de  $\mathfrak{S}_{i+j}^{i,j}$ , posée au début du paragraphe 2, implique que  $\mathfrak{S}_i^{o,i} = \{1\}$ . Il ne figure donc qu'un seul terme dans la somme et l'égalité des deux membres de droite se réduit à:

$$\delta_G^{-1}(xK) \cdot \xi(xK) \cdot \omega^i(xK, X_1, \dots, X_i) = \omega_G^f(xK) \cdot \omega^i(xK, X_1, \dots, X_i)$$

Pour obtenir cette égalité, il suffit de prendre comme représentant de la classe fondamentale  $\omega_G^f$  définie par la relation:

$$\forall xK \in \mathbf{G}/\mathbf{K}, \omega_G^f(xK) = \delta_G^{-1}(xK) \cdot \xi(xK)$$

Ce qui termine la preuve. ■

**Théorème 3.1.** Le cap-produit avec la classe fondamentale  $[\omega_G^f]$  induit un isomorphisme:

$$H^i(\mathbf{G}, \mathbf{M}) \xrightarrow{[\omega_G^f] \cap} H_{s-i}(\mathbf{G}, \mathbf{M} \otimes \delta_G^{-1})$$

**Preuve.** C'est une conséquence directe du lemme 3.4 et de la proposition 3.4. Nous retrouvons ainsi, dans notre cadre, la formulation classique apparaissant en particulier en géométrie différentielle. ■

#### 4. Transfert homologique et cohomologique, formule du transfert

Pour définir le transfert, nous aurons besoin d'un critère de coïnvariance dans l'espace  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  sur lequel  $\Gamma$ , un sous-groupe fermé de  $\mathbf{G}$ , agit par translation à droite.



**Critère 4.1.** Soit  $d\gamma$  une mesure invariante à gauche sur  $\Gamma$  et  $\delta_\Gamma$  le module de  $\Gamma$ . Si  $f \in C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  vérifie les équations intégrales:

$$\forall x \in \mathbf{G}, \int_{\Gamma} f(x\gamma) d\gamma = 0$$

alors il existe un nombre fini de couples  $(\gamma_1, f_1), \dots, (\gamma_l, f_l) \in \Gamma \times C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  tels que:

$$\forall x \in \mathbf{G}, f(x) = \delta_\Gamma^{-1}(\gamma_1) \cdot f_1(x\gamma_1) - f_1(x) + \dots + \delta_\Gamma^{-1}(\gamma_l) \cdot f_l(x\gamma_l) - f_l(x)$$

**Preuve.** La démonstration se trouve dans [3] pages 7 et 8. ■

**Proposition 4.1.** Quel que soit  $\Gamma$  un sous-groupe fermé de  $\mathbf{G}$ , si  $\mathbf{M}$  est un module dans  $\mathcal{D}_\Gamma$ , nous faisons agir  $\Gamma$  à gauche sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  et sur  $\mathbf{M}$  simultanément. Les modules ci-dessous, définis par cette action diagonale, ont dans la catégorie  $\mathcal{D}_\Gamma$  les propriétés suivantes:

- a)  $\forall i \in [0, s]$  le module  $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  est  $\Gamma$ -projectif
- b)  $\forall i \in [0, s]$  le module  $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  est  $\Gamma$ -injectif

Ce résultat est à rapprocher du théorème du § 6 de [3] page 18 et de sa généralisation aux formes de degré quelconque due à J. Pichaud [14].

**Preuve.** Pour prouver a) nous appliquons la construction qui figure dans la thèse de F. Bruhat [7] page 103 et en moyennant la fonction construite par rapport à  $\mathbf{K}$ , nous obtenons une fonction  $\chi$  de  $C^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  ayant les propriétés suivantes:

- $\chi$  est invariante à gauche par  $\mathbf{K}$
- $\forall g \in \mathbf{G}, \gamma \mapsto \chi(g\gamma)$  est à support compact dans  $\Gamma$
- $\int_{\Gamma} \chi(Kg\gamma) d\gamma = 1$

Nous fixons une fois pour toute une telle fonction  $\chi$  et à toute forme  $\omega_i$  de  $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  nous associons la fonction  $\omega_{i,\chi}$  de  $C^\infty(\Gamma, \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}))$  définie par la formule:

$$\begin{aligned} \forall \gamma \in \Gamma, \forall gK \in \mathbf{G}/\mathbf{K}, \forall X_1, \dots, X_i \in T(\mathbf{G}/\mathbf{K}), \\ \omega_{i,\chi}(\gamma)(gK, X_1, \dots, X_i) = \omega_i(gK, X_1, \dots, X_i) \chi(Kg^{-1}\gamma) \end{aligned}$$

Soit  $\underline{\mu}$  une surjection dans  $\mathcal{D}_\Gamma$  de  $\mathbf{V}$  sur  $\mathbf{U}$  admettant un inverse à droite  $\underline{m}$  dans  $\mathcal{E}$  et  $\varphi$  un morphisme de  $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  dans  $\mathbf{U}$ . Nous définissons  $\underline{\varphi}$  de  $\Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  dans  $\mathbf{V}$  par la formule:

$$\forall \omega_i \in \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}), \underline{\varphi}(\omega_i) = \int_{\Gamma} \gamma \underline{m} \gamma^{-1} \varphi(\omega_{i,\chi}(\gamma)) d\gamma$$

Le fait que  $\underline{\varphi}$  définisse un  $\Gamma$ -morphisme et qu'il soit un relèvement à  $\mathbf{V}$  de  $\varphi$  résulte de calculs directs analogues à ceux que nous allons expliciter pour montrer l'injectivité des formes.

Pour prouver b) nous nous donnons dans  $\mathcal{D}_\Gamma$  une injection  $\bar{\mu}$  de  $\mathbf{U}$  dans  $\mathbf{V}$  qui admet dans  $\mathcal{E}$  un inverse à gauche  $\bar{m}$  et  $\psi$  un morphisme de  $\mathbf{U}$  dans  $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$ .

Nous définissons un morphisme  $\bar{\psi}$  de  $\mathbf{V}$  dans  $\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})$  par la formule:

$$\forall v \in \mathbf{V}, \bar{\psi}(v)(gK, X_1, \dots, X_i) = \int_{\Gamma} \psi(\gamma \bar{m} \gamma^{-1} v)(gK, X_1, \dots, X_i) \chi(Kg^{-1}\gamma) d\gamma$$

Montrons que  $\bar{\psi}$  prolonge  $\psi$  :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\bar{\mu}(u)(gK, X_1, \dots, X_i) &= \\ \int_{\Gamma} \psi(\gamma \bar{m} \gamma^{-1} \bar{\mu}(u))(gK, X_1, \dots, X_i) \chi(Kg^{-1}\gamma) d\gamma &= \\ \int_{\Gamma} \psi(u)(gK, X_1, \dots, X_i) \chi(Kg^{-1}\gamma) d\gamma &= \\ \psi(u)(gK, X_1, \dots, X_i) \int_{\Gamma} \chi(Kg^{-1}\gamma) d\gamma &= \\ \psi(u)(gK, X_1, \dots, X_i) \end{aligned}$$

Ceci montre que  $\bar{\psi}$  est un prolongement de  $\mathbf{U}$  à  $\mathbf{V}$  du morphisme  $\psi$ .

Montrons que  $\bar{\psi}$  est un  $\Gamma$ -morphisme:

$$\begin{aligned} \forall \gamma_0 \in \Gamma, \\ \gamma_0 \bar{\psi}(v)(gK, X_1, \dots, X_i) &= \gamma_0 \cdot \bar{\psi}(v)(\gamma_0^{-1}gK, T(\gamma_0^{-1})X_1, \dots, T(\gamma_0^{-1})X_i) = \\ \gamma_0 \cdot \int_{\Gamma} \psi(\gamma \bar{m} \gamma^{-1} v)(\gamma_0^{-1}gK, T(\gamma_0^{-1})X_1, \dots, T(\gamma_0^{-1})X_i) \chi(Kg^{-1}\gamma_0\gamma) d\gamma \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable ( $\gamma \mapsto \gamma_0^{-1}\gamma$ ) et en utilisant le fait que  $\psi$  est un  $\Gamma$ -morphisme cette dernière expression devient:

$$\begin{aligned} \gamma_0 \cdot \int_{\Gamma} \psi(\gamma_0^{-1}\gamma \bar{m} \gamma^{-1} \gamma_0 v)(\gamma_0^{-1}gK, T(\gamma_0^{-1})X_1, \dots, T(\gamma_0^{-1})X_i) \chi(Kg^{-1}\gamma) d\gamma &= \\ \int_{\Gamma} \psi(\gamma \bar{m} \gamma^{-1} \gamma_0 v)(gK, X_1, \dots, X_i) \chi(Kg^{-1}\gamma) d\gamma &= \bar{\psi}(\gamma_0 v)(gK, X_1, \dots, X_i) \end{aligned}$$

Ceci montre que  $\bar{\psi}$  est dans  $\mathcal{D}_{\Gamma}$  et achève la preuve de la proposition 4.1 . ■

Le sous-groupe  $\Gamma$  est maintenant supposé cocompact, rappelons que  $\delta_G$  et  $\delta_{\Gamma}$  dénotent les modules de  $\mathbf{G}$  et de  $\Gamma$ ,  $dg$  et  $d\gamma$  les mesures invariantes à gauche sur  $\mathbf{G}$  et  $\Gamma$ . Les deux propositions suivantes énoncent l'existence du transfert homologique et du transfert cohomologique en degré 0.

**Proposition 4.2.** *Soit  $\mathbf{M}$  un module de  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  et soit  $\chi$  une fonction dans  $C_c^{\infty}(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  telle que:*

$$\forall g \in \mathbf{G}, \int_{\Gamma} \chi(g\gamma) d\gamma = 1$$

Posons:

$$\forall m \in \mathbf{M}, \text{Tra}_G^\Gamma(m) = \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) \chi(x) x^{-1}.m dx$$

$\text{Tra}_G^\Gamma$  applique la classe de coïnvariance nulle sous l'action de  $\mathbf{G}$  tordue par  $\delta_{\mathbf{G}^{-1}}$  sur la classe de coïnvariance nulle sous l'action de  $\Gamma$  tordue par  $\delta_\Gamma^{-1}$  et induit donc une application encore notée  $\text{Tra}_G^\Gamma$  :

$$(\delta_G^{-1} \otimes \mathbf{M})_{\mathbf{G}} \xrightarrow{\text{Tra}_G^\Gamma} (\delta_\Gamma^{-1} \otimes \mathbf{M})_\Gamma$$

**Preuve.** Ceci revient à prouver que pour tout couple  $(g, m) \in \mathbf{G} \times \mathbf{M}$ , il existe un nombre fini de couples  $(\gamma_1, m_1), \dots, (\gamma_l, m_l) \in \Gamma \times \mathbf{M}$  tels que:

$$\text{Tra}_G^\Gamma(\delta_G^{-1}(g) g.m - m) = \delta_\Gamma^{-1}(\gamma_1) \gamma_1.m_1 - m_1 + \dots + \delta_\Gamma^{-1}(\gamma_l) \gamma_l.m_l - m_l$$

Explicitons le premier membre de cette égalité conjecturale:

$$\begin{aligned} \text{Tra}_G^\Gamma(\delta_G^{-1}(g) g.m - m) &= \\ \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1}(\delta_G^{-1}(g) g.m - m) \chi(x) dx &= \\ \int_{\mathbf{G}} (\delta_G(xg^{-1}) x^{-1} g.m - \delta_G(x) x^{-1}.m) \chi(x) dx &= \\ \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1}.m \chi(gx) dx - \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1}.m \chi(x) dx &= \\ \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1}.m (\chi(gx) - \chi(x)) dx & \end{aligned}$$

L'hypothèse faite sur  $\chi$  implique:

$$\forall g \in \mathbf{G}, \forall x \in \mathbf{G}, \int_{\Gamma} \chi(gx\gamma) d\gamma = \int_{\Gamma} \chi(x\gamma) d\gamma = 1$$

La fonction  $(\gamma \mapsto \chi(gx\gamma) - \chi(x\gamma))$  est donc d'intégrale nulle sur  $\Gamma$ , nous pouvons lui appliquer le critère 4.1 :

$$\forall g \in \mathbf{G}, \exists (\gamma_1, \chi_1), \dots, (\gamma_l, \chi_l) \in \Gamma \times C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{C}), \forall x \in \mathbf{G},$$

$$\chi(gx) - \chi(x) = \delta_\Gamma^{-1}(\gamma_1). \chi_1(x\gamma_1) - \chi_1(x) + \dots + \delta_\Gamma^{-1}(\gamma_l). \chi_l(x\gamma_l) - \chi_l(x)$$

Le premier membre de l'égalité conjecturale devient:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1} \cdot m (\delta_{\Gamma}^{-1}(\gamma_1) \chi_1(x \gamma_1) - \chi_1(x)) dx + \dots \\
& + \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1} \cdot m (\delta_{\Gamma}^{-1}(\gamma_l) \chi_l(x \gamma_l) - \chi_l(x)) dx = \\
& \delta_{\Gamma}^{-1}(\gamma_1) \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1} \cdot m \chi_1(x \gamma_1) dx - \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1} \cdot m \chi_1(x) dx + \dots \\
& + \delta_{\Gamma}^{-1}(\gamma_l) \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1} \cdot m \chi_l(x \gamma_l) dx - \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1} \cdot m \chi_l(x) dx = \\
& \delta_{\Gamma}^{-1}(\gamma_1) \gamma_1 \cdot \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1} \cdot m \chi_1(x) dx - \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1} \cdot m \chi_1(x) dx + \dots \\
& + \delta_{\Gamma}^{-1}(\gamma_l) \gamma_l \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1} \cdot m \chi_l(x \gamma_l) dx - \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1} \cdot m \chi_l(x) dx
\end{aligned}$$

Posons:  $m_1 = \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1} \cdot m \chi_1(x) dx, \dots m_l = \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) x^{-1} \cdot m \chi_l(x) dx$

Nous obtenons l'égalité conjecturée, à savoir la relation de  $\Gamma$ -coïnvariance à 0:

$$\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}(\delta_{\mathbf{G}}^{-1}(g) g \cdot m - m) = \delta_{\Gamma}^{-1}(\gamma_1) \gamma_1 \cdot m_1 - m_1 + \dots + \delta_{\Gamma}^{-1}(\gamma_l) \gamma_l \cdot m_l - m_l$$

Ceci achève la preuve de la proposition 4.2 . ■

**Proposition 4.3.** Soit  $\mathbf{M}$  un module de  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  et soit  $\chi \in C_c^{\infty}(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  telle que:

$$\int_{\Gamma} \chi(g\gamma) d\gamma = 1$$

$$\text{Posons : } \forall m \in \mathbf{M}, \text{Tra}_{\Gamma}^{\mathbf{G}}(m) = \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) \chi(x) x \cdot m dx$$

L'intégrale est bien définie, elle est indépendante de  $\chi$  et si  $m$  vérifie la relation d'invariance:

$$\forall \gamma \in \Gamma, \delta_{\Gamma}(\gamma) \gamma \cdot m = m$$

le vecteur  $\text{Tra}_{\Gamma}^{\mathbf{G}}(m)$  satisfait à la relation d'invariance:

$$\forall g \in \mathbf{G}, \delta_G(g) g \cdot \text{Tra}_{\Gamma}^{\mathbf{G}}(m) = \text{Tra}_{\Gamma}^{\mathbf{G}}(m)$$

Ce qui nous permet de passer aux invariants:

$$(\delta_{\Gamma} \otimes \mathbf{M})^{\Gamma} \xrightarrow{\text{Tra}_{\Gamma}^{\mathbf{G}}} (\delta_G \otimes \mathbf{M})_G$$

La démonstration se fera en trois étapes.

**Preuve.**

1ère étape - Supposons:

$$\forall m \in \mathbf{M}, \forall \gamma \in \Gamma, \delta_G(\gamma) \gamma.m = m$$

L'invariance à gauche de  $dx$  sous  $\mathbf{G}$  implique:

$$\delta_G(g) g. \text{Tra}_\Gamma^G(m) = \int_G \delta_G(gx) \chi(x) gx.m dx = \int_G \delta_G(x) \chi(g^{-1}x) x.m dx$$

2ème étape - Nous appliquons le critère 4.1 :

$$\chi(g^{-1}x) - \chi(x) = \delta_\Gamma^{-1}(\gamma_1) \chi_1(x\gamma_1) - \chi_1(x) + \cdots + \delta_\Gamma^{-1}(\gamma_l) \chi_l(x\gamma_l) - \chi_l(x)$$

3ème étape - L'hypothèse d'invariance de  $m$  sous  $\Gamma$  implique:

$$\forall j \in [1, l], \delta_\Gamma(\gamma_j) \gamma_j.m = m$$

Ceci joint, pour chaque  $j$ , au changement de la variable ( $x \mapsto x\gamma_j$ ), implique les égalités:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) \delta_\Gamma^{-1}(\gamma_j) \chi_j(x\gamma_j) x.m dx &= \\ \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x\gamma_j^{-1}) \delta_\Gamma^{-1}(\gamma_j) \delta_G(\gamma_j) \chi_j(x) x\gamma_j^{-1}.m dx &= \\ \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) \delta_\Gamma^{-1}(\gamma_j) \chi_j(x) x\gamma_j^{-1}.m dx &= \\ \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) \chi_j(x) x.m dx \end{aligned}$$

De ceci et des deux étapes précédentes résultent:

$$\int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) (\chi(g^{-1}x) - \chi(x)) x.m dx = 0$$

Et donc la relation d'invariance:

$$\forall g \in \mathbf{G}, \delta_G(g) g. \text{Tra}_\Gamma^G(m) = \text{Tra}_\Gamma^G(m)$$

Ceci termine la preuve de la proposition 4.3 . ■

Remarquons que si, dans la catégorie  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$ ,  $u$  est un morphisme de  $\mathbf{M}$  à valeurs dans  $\mathbf{N}$ :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbf{M}, \\ \text{Tra}_G^\Gamma(u(m)) &= \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) \chi(x) x^{-1}.u(m) dx = \\ \int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) \chi(x) u(x^{-1}.m) dx &= \int_{\mathbf{G}} u(\delta_G(x) \chi(x) x^{-1}.m) dx = \\ u\left(\int_{\mathbf{G}} \delta_G(x) \chi(x) x^{-1}.m dx\right) &= u(\text{Tra}_G^\Gamma(m)) \end{aligned}$$

Ce qui se traduit par le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{M} \otimes \delta_G^{-1})_{\mathbf{G}} & \xrightarrow{\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}} & (\mathbf{M} \otimes \delta_{\Gamma}^{-1})_{\Gamma} \\ u \downarrow & & u \downarrow \\ (\mathbf{N} \otimes \delta_G^{-1})_{\mathbf{G}} & \xrightarrow{\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}} & (\mathbf{N} \otimes \delta_{\Gamma}^{-1})_{\Gamma} \end{array}$$

En d'autres termes,  $\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}$  est une transformation naturelle du foncteur des  $\mathbf{G}$ -coïnvariants vers celui des  $\Gamma$ -coïnvariants. Mais  $\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}$  n'est pas induite par une application dans une catégorie de modules, confer K.S. Brown [6] page 80 .

Le passage de  $\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}$  et  $\text{Tra}_{\Gamma}^G$  en degré 0 aux groupes d'homologie et de cohomologie en degré supérieur s'obtient de la façon suivante: l'application  $\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}$  induit une application notée encore  $\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}$  sur les foncteurs dérivés, où  $i$  varie de 0 à  $s$  la dimension de  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ , le transfert sur les formes s'écrit:

$$\begin{array}{ccc} (\Omega_c^{s-i}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_G^{-1})_{\mathbf{G}} & \xrightarrow{\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}} & \Omega_c^{s-i}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_{\Gamma}^{-1})_{\Gamma} \\ (\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_{\Gamma})^{\Gamma} & \xrightarrow{\text{Tra}_{\Gamma}^G} & \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_G)^{\mathbf{G}} \end{array}$$

Le fait que  $\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}$  et  $\text{Tra}_{\Gamma}^G$  commutent à la différentielle extérieure se démontre par dérivation sous le signe somme. Nous obtenons ainsi deux morphisme de complexes et ceci nous permet de définir les transferts  $\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}$  et  $\text{Tra}_{\Gamma}^G$  sur les espaces d'homologie et de cohomologie en degré supérieur.

**Définition 4.1.** Le transfert homologique est le morphisme induit sur les groupes d'homologie par l'application  $\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}$  sur les formes à support compact:

$$H_i(\mathbf{G}, \mathbf{M} \otimes \delta_G^{-1}) \xrightarrow{\text{Tra}_{\mathbf{G}}^{\Gamma}} H_i(\Gamma, \mathbf{M} \otimes \delta_{\Gamma}^{-1})$$

**Définition 4.2.** Le transfert cohomologique est le morphisme induit sur les groupes de cohomologie par l'application  $\text{Tra}_{\Gamma}^G$  sur les formes:

$$H^i(\Gamma, \mathbf{M} \otimes \delta_{\Gamma}) \xrightarrow{\text{Tra}_{\Gamma}^G} H^i(\mathbf{G}, \mathbf{M} \otimes \delta_G)$$

**Définition 4.3.** Si  $\Gamma$  est un sous-groupe fermé dans  $\mathbf{G}$  et si  $\mathbf{M}$  est un module de  $\mathcal{D}_G$  notons  $\text{Res}_{\Gamma}^G$  l'opération de restriction homologique de  $\mathbf{M}_{\Gamma}$  sur  $\mathbf{M}_G$  et  $\text{Res}_{\Gamma}^{\Gamma}$  l'opération de restriction cohomologique de  $\mathbf{M}^G$  dans  $\mathbf{M}^{\Gamma}$ . Ceux sont des transformations naturelles qui induisent des applications notés encore  $\text{Res}_{\Gamma}^G$  et  $\text{Res}_{\Gamma}^{\Gamma}$  sur les espaces de (co)homologie:

$$H_i(\mathbf{G}, \mathbf{M}) \xrightarrow{\text{Res}_{\Gamma}^G} H_i(\Gamma, \mathbf{M})$$

$$H^i(\Gamma, \mathbf{M}) \xrightarrow{\text{Res}_{\Gamma}^G} H^i(\mathbf{G}, \mathbf{M})$$

Remarque: la restriction cohomologique  $\text{Res}_{\Gamma}^{\Gamma}$  est définie via l'inclusion des formes sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  invariantes par  $\mathbf{G}$  dans les formes sur  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  invariantes par  $\Gamma$ , composer le transfert avec la restriction n'est possible que si la restriction de  $\delta_G$

à  $\Gamma$  est égale à  $\delta_\Gamma$  et si  $\Gamma$  est cocompact. Dans ce cas, si  $\mathbf{M}$  est un  $G$ -module différentiable et si  $m$  est un vecteur de  $(\delta_G \otimes \mathbf{M})^G$ , l'hypothèse faite sur  $\chi$  dans la proposition 4.3 implique:

$$\begin{aligned} \text{Tra}_\Gamma^G(m) &= \int_{\mathbf{G}} \delta_G(g) \chi(g) g.m dg = \int_{\mathbf{G}} \chi(g) dg.m = \\ &= \int_{\mathbf{G}/\Gamma} \int_{\Gamma} \chi(g\gamma) d\gamma dg \Gamma.m = \int_{\mathbf{G}/\Gamma} dg \Gamma.m \end{aligned}$$

Les mesures de Haar étant fixées, il en résulte que  $\text{Tra}_\Gamma^G \text{Res}_G^\Gamma$  est la multiplication par  $\int_{\mathbf{G}/\Gamma} dg \Gamma$ , le volume de  $\mathbf{G}/\Gamma$ . Si  $\delta_G$  et  $\delta_\Gamma$  coïncident sur  $\Gamma$  l'application  $\text{Tra}_\Gamma^G$  est donc surjective.

Dans le cas où  $\delta_G$  restreint à  $\Gamma$  est différent de  $\delta_\Gamma$  le transfert n'est pas toujours surjectif, prendre par exemple pour  $\mathbf{G}$  un groupe réductif et pour  $\Gamma$  un sous-groupe parabolique propre: le transfert appliqué au  $G$ -module  $\delta_G^{-1}$  va de  $(\delta_G^{-1} \otimes \delta_\Gamma)^\Gamma$  dans  $(\delta_G^{-1} \otimes \delta_G)^G$ , le premier espace est égal à 0, la deuxième est isomorphe à  $\mathbf{C}$ , donc dans ce cas  $\text{Tra}_\Gamma^G$  n'est pas surjectif.

Nous venons de définir les ingrédients nécessaires pour démontrer la formule du transfert, si  $\Gamma$  est un sous-groupe cocompact dans  $\mathbf{G}$ , rappelons que  $\text{Tra}_G^\Gamma$  désigne dans  $\mathcal{D}_G$  le transfert homologique et  $\text{Tra}_\Gamma^G$  le transfert cohomologique, la lettre  $s$  désigne la dimension de  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ . La formule du transfert décrite ici, est une relation de commutation entre le cap-produit et le transfert, nous nous sommes inspirés de la version relative au cup-produit et aux sous-groupes d'indice fini des groupes discrets démontrée par K.S. Brown dans [6] page 112.

**Proposition 4.4.** *Soit  $\mathbf{G}$  est un groupe de Lie réel ayant un nombre fini de composantes connexes, soit  $\Gamma$  un sous-groupe cocompact dans  $\mathbf{G}$ , fixons deux modules  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  de  $\mathcal{D}_G$  et un couple d'entiers  $(i, j)$  tels que  $s \geq i \geq j \geq 0$ . Toute forme à support compact  $\omega_{s-i}$  représentante d'une classe de coïnvariance dans  $\Omega_c^{s-i}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_G^{-1})_G$  et toute forme  $\omega^j$  de  $\Omega^j(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{N} \otimes \delta_\Gamma)^\Gamma$  vérifient dans  $\Omega_c^{s-i+j}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})_G$  la formule du transfert:*

$$\text{Res}_\Gamma^G(\text{Tra}_G^\Gamma(\omega_{s-i}) \cap \omega^j) = \omega_{s-i} \cap \text{Tra}_\Gamma^G(\omega^j)$$

**Preuve.** Elle repose sur la démonstration de la commutativité du diagramme ci-dessous:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_c^{s-i}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_\Gamma^{-1})_\Gamma \times \Omega^j(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{N} \otimes \delta_\Gamma)^\Gamma & \xrightarrow{\cap} & \Omega_c^{s-i+j}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})_\Gamma \\ \text{Tra}_G^\Gamma \times \text{Id} \uparrow & & \\ \Omega_c^{s-i}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_G^{-1})_G \times \Omega^j(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{N}) \otimes \delta_\Gamma^\Gamma & & \text{Res}_\Gamma^G \downarrow \\ \text{Id} \times \text{Tra}_\Gamma^G \downarrow & & \\ \Omega_c^{s-i}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_G^{-1})_G \times (\Omega^j(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{N} \otimes \delta_G)^G & \xrightarrow{\cap} & \Omega_c^{s-i+j}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})_G \end{array}$$

Nous procédons en deux étapes: dans la première nous calculons explicitement sur les formes différentielles les applications composées de la partie haute et

de la partie basse du diagramme, dans la seconde nous prouvons par un lemme d'homologie que la classe de coïnvariance sous l'action de  $\Gamma$  obtenue en haut est contenue dans la classe de coïnvariance sous l'action de  $\mathbf{G}$  obtenue en bas. Nous aurons besoin du lemme de coïnvariance qui suit pour mener à bien la deuxième étape de la démonstration.

**Lemme 4.1.** *Soit  $\mathbf{P}$  est un module projectif dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$ , l'intégration à valeurs dans  $\mathbf{P}$  préserve la coïnvariance à 0 :*

$$\forall e \in C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P}), \int_{\mathbf{G}} (g - 1).e(g) dg \in {}_{\mathbf{G}}\mathbf{P}$$

**Preuve.** Rappelons que  ${}_{\mathbf{G}}\mathbf{P}$  désigne l'espace des vecteurs coïnvariants à 0 dans  $\mathbf{P}$  à savoir le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{P}$  algébriquement engendré par les vecteurs élémentaires  $g.p - p$  où  $(g, p)$  parcourt  $\mathbf{G} \times \mathbf{P}$ .

Montrons tout d'abord le lemme quand  $\mathbf{P}$  est égal à  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  où  $\mathbf{M}$  est un module quelconque de  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  et quand  $\mathbf{G}$  agit sur  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  par translation à gauche sur  $\mathbf{G}$  et à gauche sur  $\mathbf{M}$ .

Nous définissons l'application  $\tilde{\epsilon}$  de  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  dans  $\mathbf{M}$  par la formule:

$$\forall f \in C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M}), \quad \tilde{\epsilon}(f) = \int_{\mathbf{G}} x^{-1}.f(x) dx$$

Appliquons le critère 2.1 aux fonctions  $(g \mapsto g^{-1}.f(g))$ , nous obtenons:

$$\text{Ker } \tilde{\epsilon} = {}_{\mathbf{G}}C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$$

Le lemme sera démontré pour  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  si nous montrons que:

$$\forall e \in C_c^\infty(\mathbf{G}, C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})), \int_{\mathbf{G}} (g - 1).e(g) dg \in \text{Ker } \tilde{\epsilon}$$

Ceci résulte du calcul suivant:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}\left(\int_{\mathbf{G}} (g - 1).e(g) dg\right) &= \int_{\mathbf{G}} x^{-1}. \int_{\mathbf{G}} (g - 1).e(g) dg(x) dx = \\ &= \int_{\mathbf{G}} \int_{\mathbf{G}} x^{-1}g.e(g)(g^{-1}x) dg dx - \int_{\mathbf{G}} x^{-1}.e(g)(x) dg dx = \\ &= \int_{\mathbf{G}} \int_{\mathbf{G}} y^{-1}.e(g)(y) dg dx - \int_{\mathbf{G}} \int_{\mathbf{G}} x^{-1}.e(g)(x) dg dx = 0 \end{aligned}$$

La dernière ligne provient du changement de variables  $(x \mapsto y = gx)$ .

Il résulte de ce calcul que  $\int_{\mathbf{G}} (g - 1).f(g)dg$  appartient à  $\text{Ker } \tilde{\epsilon}$  qui est égal à  ${}_{\mathbf{G}}C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$ , le lemme est donc démontré pour les modules projectifs  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  où  $\mathbf{M}$  est un module quelconque de  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$ .

Pour tout module  $\mathbf{M}$  nous définissons  $\epsilon$  et  $\eta$  de  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M})$  dans  $\mathbf{M}$  par les formules:

$$\forall f \in C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{M}), \quad \epsilon(f) = \int_{\mathbf{G}} f(x) dx \quad \eta(f) = \int_{\mathbf{G}} (x - 1).f(x) dx$$



Nous savons, confer [4] que  $\epsilon$  est une application surjective de  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  et que si  $\mathbf{P}$  est un module projectif, la surjection  $\epsilon$  de  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P})$  sur  $\mathbf{P}$  admet dans  $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$  un inverse à droite, nous noterons  $\sigma$  l'application induite de  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P})$  dans  $C_c^\infty(\mathbf{G}, C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$  par cet inverse. Considérons la suite de  $\mathbf{G}$ -modules où  $\eta$  est relative à  $\mathbf{M}$  égal à  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P})$ :

$$C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P}) \xrightarrow{\sigma} C_c^\infty(\mathbf{G}, C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P})) \xrightarrow{\eta} C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{P}$$

Montrons que l'application composée  $\epsilon\eta\sigma$  coïncide avec l'application  $\eta$  relative à  $\mathbf{M}$  égal à  $\mathbf{P}$ :

$$\begin{aligned} \forall e \in C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P}), \epsilon\eta\sigma(e) &= \int_{\mathbf{G}} (\eta\sigma(e)(y)dy = \\ &= \int_{\mathbf{G} \times \mathbf{G}} y \cdot \sigma(e)(y, y^{-1}x) dx dy - \int_{\mathbf{G} \times \mathbf{G}} \sigma(e)(y, x) dx dy = \\ &= \int_{\mathbf{G} \times \mathbf{G}} \sigma(ye)(y, x) - \int_{\mathbf{G} \times \mathbf{G}} \sigma(e)(y, x) dy dx = \\ &= \int_{\mathbf{G} \times \mathbf{G}} \sigma(ye - e)(y, x) dy dx = \int_{\mathbf{G}} \left( \int_{\mathbf{G}} \sigma(ye - e)(y, x) dx \right) dy = \\ &= \int_{\mathbf{G}} \epsilon\sigma(ye - e)(y) dy = \int_{\mathbf{G}} (y - 1) \cdot e(y) dy = \eta(e) \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $\epsilon\eta\sigma$  coïncide avec  $\eta$  sur  $C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P})$ , par ailleurs la première partie de la preuve implique que  $\eta(C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$  est contenue dans  ${}_{\mathbf{G}}C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P})$ . Enfin,  $\epsilon$  est un  $\mathbf{G}$ -morphisme, il applique  ${}_{\mathbf{G}}C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P})$  sur  ${}_{\mathbf{G}}\mathbf{P}$ . De la composition de ces trois faits, il résulte que  $\int_{\mathbf{G}} (g - 1) \cdot e(g) dg$  est dans  ${}_{\mathbf{G}}\mathbf{P}$  et le lemme est démontré. ■

Nous pouvons maintenant poursuivre la preuve de la proposition 4.4 . La première étape consiste à comparer dans le diagramme figurant en début de preuve les classes obtenues en haut et en bas.

Ici  $\omega_{s-i}$  est une représentante d'une classe de  $\Omega_c^{s-i}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_G^{-1})_G$  et  $\omega^j$  est une forme de  $\Omega^j(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{N} \otimes \delta_\Gamma)^G$ .

Nous avons en haut:

$$\text{Tra}_G^\Gamma(\omega_{s-i}) \cap \omega^j = \int_{\mathbf{G}} \delta_G(t) \chi(t) (t^{-1} \omega_{s-i} \otimes \omega^j) dt$$

Nous avons en bas:

$$\omega_{s-i} \cap \text{Tra}_\Gamma^G(\omega^j) = \int_{\mathbf{G}} \delta_G(t) \chi(t) (\omega_{s-i} \otimes t \omega^j) dt$$

Il s'agit de montrer que la différence entre les deux formes obtenues est coïnvariante à 0 dans le  $\mathbf{G}$ -module  $\Omega_c^{s-i+j}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$ . Le changement de variable ( $t \mapsto t^{-1}$ ) et le fait que  $\mathbf{G}$  agit diagonalement sur  $\Omega_c^{s-i+j}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$  nous donne:

$$\text{Tra}_G^\Gamma(\omega_{s-i}) \cap \omega^j - \omega_{s-i} \cap \text{Tra}_\Gamma^G(\omega^j) = \int_{\mathbf{G}} \chi(t^{-1}) (t - 1) \cdot (\omega_{s-i} \otimes t^{-1} \omega^j) dt$$

La deuxième étape consiste à appliquer le lemme 4.1 au membre de droite de la formule ci-dessus. Nous prenons pour  $\mathbf{P}$  le  $\mathbf{G}$ -module  $\Omega_c^{s-i+j}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$  qui, d'après la proposition 4.1, est projectif et pour  $e$  la fonction définie sur  $\mathbf{G}$  et à valeurs dans  $\Omega_c^{s-i+j}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$ :  $t \mapsto e(t) = \chi(t^{-1})(\omega_{s-i} \otimes t^{-1}\omega^j)$ . L'application du lemme 4.1 implique que  $\int_{\mathbf{G}} \chi(t^{-1})(t-1) \cdot (\omega_{s-i} \otimes t^{-1}\omega^j) dt$  est coïnvariante à 0. La différence des deux formes  $\text{Tra}_G^\Gamma(\omega_{s-i}) \cap \omega^j$  et  $\omega_{s-i} \cap \text{Tra}_\Gamma^G(\omega^j)$  figurant à gauche dans la formule est donc coïnvariante à 0 dans  $\Omega_c^{s-i+j}(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})$  pour l'action de  $\mathbf{G}$ .

Ceci démontre, par définition de  $\text{Res}_\Gamma^G$ , la commutativité du diagramme décrit en début de preuve et donc la formule du transfert, ce qui achève la démonstration de la proposition 4.4. ■

**Corollaire 4.1.** *La formule du transfert a pour conséquence sur les espaces d'homologie et de cohomologie la commutativité du diagramme suivant:*

$$\begin{array}{ccc}
 H_i(\Gamma, \mathbf{M} \otimes \delta_\Gamma^{-1}) \times H^j(\Gamma, \mathbf{N} \otimes \delta_\Gamma) & \xrightarrow{\cap} & H_{i-j}(\Gamma, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N}) \\
 \text{Tra}_G^\Gamma \times \text{Id} \uparrow & & \\
 H_i(\mathbf{G}, \mathbf{M} \otimes \delta_G^{-1}) \times H^j(\Gamma, \mathbf{N}) \otimes \delta_\Gamma & & \text{Res}_\Gamma^G \downarrow \\
 \text{Id} \times \text{Tra}_\Gamma^G \downarrow & & \\
 H_i(\mathbf{G}, \mathbf{M} \otimes \delta_G^{-1}) \times H^j(\mathbf{G}, \mathbf{N} \otimes \delta_G) & \xrightarrow{\cap} & H_{i-j}(\mathbf{G}, \mathbf{M} \hat{\otimes} \mathbf{N})
 \end{array}$$

**Preuve.** Comme le transfert, la restriction et le cap-produit commutent à la différentielle extérieure, le fait que ce diagramme d'espaces d'homologie et de cohomologie soit commutatif découle de la proposition 4.4. ■

## 5. Echange entre restriction et transfert par dualité de Poincaré:

**Lemme 5.1.** *Si  $\omega_0$  est une représentante de la classe fondamentale de  $\mathbf{G}$  son image par le transfert,  $\text{Tra}_G^\Gamma(\omega_0)$ , est une représentante de la classe fondamentale de  $\Gamma$ .*

**Preuve.** Nous pouvons représenter la classe fondamentale de  $\mathbf{G}$  et celle de  $\Gamma$  dans le même espace  $\Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{C})$ , en effet la proposition 4.1 implique que la résolution  $\mathbf{G}$ -projective sur l'espace  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  est aussi  $\Gamma$ -projective.

Posons pour tout sous-groupe  $\Gamma$  cocompact:

$$\forall \omega_0 \in \Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{C}), \epsilon_\Gamma(\omega_0) = \int_\Gamma \omega_0(\gamma^{-1}K) d\gamma$$

Une forme  $\omega_0$  est dans la classe fondamentale de  $\mathbf{G}$  si et seulement si  $\epsilon_G(\omega_0) = 1$ . Elle est dans la classe fondamentale de  $\Gamma$  si et seulement si  $\epsilon_\Gamma(\omega_0) = 1$ . Pour montrer que le transfert applique la classe fondamentale de  $\mathbf{G}$  sur la classe fondamentale de  $\Gamma$  il suffit d'établir la relation:

$$\epsilon_\Gamma \text{Tra}_G^\Gamma = \epsilon_G$$

Ceci résulte du calcul suivant:

$$\begin{aligned} \epsilon_\Gamma \text{Tra}_G^\Gamma(\omega_0) &= \int_\Gamma \int_{\mathbf{G}} \omega_0(g^{-1}\gamma^{-1}K)\chi(g^{-1})dg d\gamma = \int_\Gamma \int_{\mathbf{G}} \omega_0(g^{-1}K)\chi(g^{-1}\gamma)dg d\gamma = \\ &= \int_{\mathbf{G}} \omega_0(g^{-1}K)dg \int_\Gamma \chi(g^{-1}\gamma)d\gamma = \int_{\mathbf{G}} \omega_0(g^{-1}K)dg = \epsilon_G(\omega_0) \end{aligned}$$

Le choix d'une forme représentant la classe fondamentale de  $\mathbf{G}$  détermine donc celle de  $\Gamma$  si nous prenons son image par le transfert. ■

**Théorème 5.1.** *Soit  $\mathbf{M}$  un module de  $\mathcal{D}_G$ , l'isomorphisme de Poincaré entre-lace en chaque degré  $i$  le transfert cohomologique et la restriction homologique:*

$$\begin{array}{ccc} H^i(\Gamma, \mathbf{M} \otimes \delta_\Gamma) & \xrightarrow{[\omega_\Gamma^f] \cap} & H_{s-i}(\Gamma, \mathbf{M}) \\ \text{Tra}_\Gamma^G \downarrow & & \text{Res}_\Gamma^G \downarrow \\ H^i(\mathbf{G}, \mathbf{M} \otimes \delta_G) & \xrightarrow{[\omega_G^f] \cap} & H_{s-i}(\mathbf{G}, \mathbf{M}) \end{array}$$

**Preuve.** Nous spécialisons le diagramme de la formule du transfert figurant dans la preuve de la proposition 4.4 au module trivial  $\mathbf{C}$  et à  $\mathbf{M}$  un module quelconque de  $\mathcal{D}_G$ , ce qui donne le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \delta_\Gamma^{-1})_\Gamma \times \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \otimes \delta_\Gamma^\Gamma & \xrightarrow{\cap} & \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})_\Gamma \\ \text{Tra}_G^\Gamma \times \text{Id} \uparrow & & \\ \Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \delta_G^{-1})_G \times \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M}) \otimes \delta_\Gamma^\Gamma & & \text{Res}_\Gamma^G \downarrow \\ \text{Id} \times \text{Tra}_\Gamma^G \downarrow & & \\ \Omega_c^0(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \delta_G^{-1})_G \times (\Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_G)^G) & \xrightarrow{\cap} & \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})_G \end{array}$$

La ligne du haut décrit l'application sur les formes définissant l'isomorphisme de Poincaré pour le groupe  $\Gamma$ , celle du bas l'isomorphisme de Poincaré pour le groupe  $\mathbf{G}$ . D'après le lemme 5.1, le choix d'une forme représentant la classe fondamentale de  $\mathbf{G}$  détermine donc celle de  $\Gamma$  si nous prenons son image par le transfert. Ceci fixé, nous obtenons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_\Gamma)^\Gamma & \xrightarrow{\omega_\Gamma^f \cap} & \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})_\Gamma \\ \text{Tra}_\Gamma^G \downarrow & & \text{Res}_\Gamma^G \downarrow \\ \Omega^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M} \otimes \delta_G)^G & \xrightarrow{\omega_G^f \cap} & \Omega_c^i(\mathbf{G}/\mathbf{K}, \mathbf{M})_G \end{array}$$

Où  $\text{Tra}(\omega_G^f) = \omega_\Gamma^f$ . Nous en déduisons un diagramme commutatif de complexes calculant respectivement l'homologie et la cohomologie de  $\mathbf{G}$  et de  $\Gamma$  ce qui achève la démonstration du théorème 5.1. ■

## Références

- [1] Bieri, R., and B. Eckmann, *B.: Groups with homological duality generalizing Poincaré duality*, Inventiones math. **20** (1973), 103–124.
- [2] Blanc, P., *Sur les fonctions d'intégrales orbitales nulles sur un groupe de Lie réductif*, Thèse d'Etat, 1985, chapitre V.

- [3] —, *Homologie différentiable et changement de groupes*, Astérisque **124-125** (1985), 14–29.
- [4] Blanc, P. and D. Wigner, *Homology of Lie groups and Poincaré duality*, Letters in math. physics **7** (1983), 259–270.
- [5] Bott, R., and L. W. Tu, “Differential forms in algebraic category,” Graduate Texts in Math. **82**, Springer-Verlag, New York etc., 1982.
- [6] Brown, K. S., “Cohomology of groups,” Graduate Texts in Math. **87**, Springer-Verlag, New York etc., 1982.
- [7] Bruhat, F., *Représentations induites des groupes de Lie*, Bulletin de la S.M.F. **84** (1956), 97–205.
- [8] Greub, W., S. Halperin, and R. Vanstone, *Connections, curvature, and cohomology* Pure and Applied Math. **47**, Academic Press, New York, 1972
- [9] Grothendieck, A., «Espaces vectoriels topologiques», Publicação da sociedade de mathematica de S.Paulo, 1964.
- [10] —, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* Memoirs of the Amer. Math. Soc. **16** (1966).
- [11] Hochschild, G., «La structure des groupes de Lie», Monographies universitaires de mathématiques, Dunod, Paris, 1968.
- [12] Hochschild, G., and G. D. Mostow, *Cohomology of Lie groups*, Illinois J. of Math. **6** (1962), 367–401.
- [13] Milnor, J. W., and J. D. Stasheff, “Characteristic classes,” Annals of Math. Studies **76**, Princeton University Press, 1974.
- [14] Pichaud, J., *G-homologie et  $(\mathfrak{g}, K)$ -homologie dans la catégorie des G-modules différentiables* Annales de l’E.N.S. 4ème série **16** (1983), 219–236.
- [15] Schwartz, L., *Théorie des distributions à valeurs vectorielles* Annales de l’Institut Fourier **8** (1959), 1–209.
- [16] Schur, I., *Neuer Beweis eines Satzes über endliche Gruppen*, Sitzungsberichte der Königlich-preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1902), 79–85.
- [17] Tu, L. W., “An Introduction to Manifolds,” Universitext, Springer-Verlag, Berlin etc. 2008.
- [18] van Est, W. T.: *On the algebraic concepts in Lie groups I and II* Proc. Koninkl. Ned. Ak., series A, **58** (1955), 225–233 and 286–294.

Philippe Blanc  
 CNRS, I2M, UMR7373  
 site Sud, campus de Luminy, case 907  
 13288 Marseille cedex 9, France  
 philippe.blanc.1@univ-amu.fr

Received January 4, 2013  
 and in final form February 12, 2015